durée : 3 heures **calculatrice autorisée**

Nom Prénom :

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Des réponses peuvent être complétées sur cette feuille. Vous rendrez cette feuille (n'oubliez pas d'**inscrire votre nom**) accompagnée de votre copie.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Bien indiquer les numéros des exercices

---

***Exercice* 1** : /1 point

Restitution organisée de connaissances
Dans cet exercice n désigne un entier naturel.

On définit une suite géométrique de la manière suivante : u_0 est donné, et $u_{n+1} = r \times u_n$

Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n = u_0 \times r^n$.

***Exercice* 2** : /1 point

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$, c'est-à-dire que $\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \ldots + \dfrac{1}{10^{n+1}} = \dfrac{1}{90}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$

***Exercice* 3** : /2,5 points

On modélise l'évolution de la population d'une ville A de la manière suivante : on considère qu'elle augmente chaque année de 2 % par rapport à l'année précédente.

Pour une ville B, on considère que sa population augmente de 1 500 personnes chaque année.

Au départ (année 0), on considère que la ville A compte 100 000 habitants et la ville B 125 000.
Pour tout entier n, on note u_n le nombre d'habitants de la ville A et v_n le nombre d'habitants de la ville B au bout de n années après l'année 0.

1. **a.** Calculer le nombre d'habitants de la ville A et le nombre d'habitants de la ville B au bout de dix ans.

   b. Quelle est la nature des suites u et v ? En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.
2. Déterminer au bout de combien d'années le nombre d'habitants de la ville A dépassera celui de la ville B.

***Exercice* 4** : 3,5 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Une personne a entendu dire que la probabilité de gagner à un jeu (jeu à gratter au bureau de tabac) est égale à $\dfrac{1}{10}$. On supposera que le fait de gagner à un grattage est indépendant des autres grattages. Cette personne se dit qu'il va donc jouer 10 fois et qu'il sera sûr de gagner quelque chose.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
2. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
3. Combien de parties faudrait-il faire pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure à 90 % ?

Partie B

Dans un pays, un quart des habitants ont les yeux bleus.

On prend un échantillon de 80 individus de ce pays : 16 ont les yeux bleus. Cet échantillon de 80 personnes est-il représentatif de la population totale du pays au regard du critère « avoir les yeux bleus » ? (On attend un résultat argumenté.)

***Exercice* 5** : /2,5 points

Déterminer les limites des suites suivantes (en justifiant vos réponses)

1. $u_n = n\sqrt{n}$
2. $v_n = \dfrac{n^2+3n-5}{3n^4}$
3. $w_n = \dfrac{n^2-5}{3n^2+2n-3}$

***Exercice* 6** : /3 points

Dites si les phrases suivantes sont Vraies ou Fausses, en justifiant la réponse :

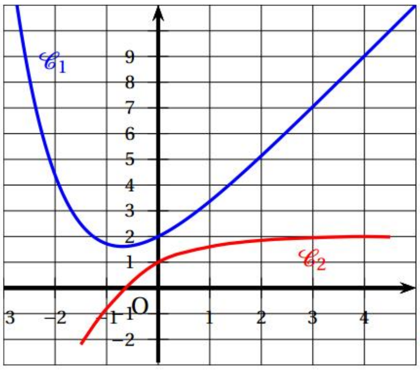
1. La fonction $x \mapsto \sqrt{9-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car une racine est toujours positive.
2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+6x+9}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(10-x)^4}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{4}{(10-x)^5}$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,10[\cup]10\,;\,+\infty[$.
4. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$.

***Exercice* 7** : /2 points

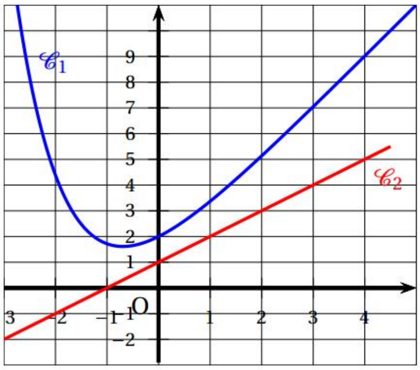
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.
Le point A de coordonnées $(0\,;2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$.
Le point B de coordonnées $(0\,;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

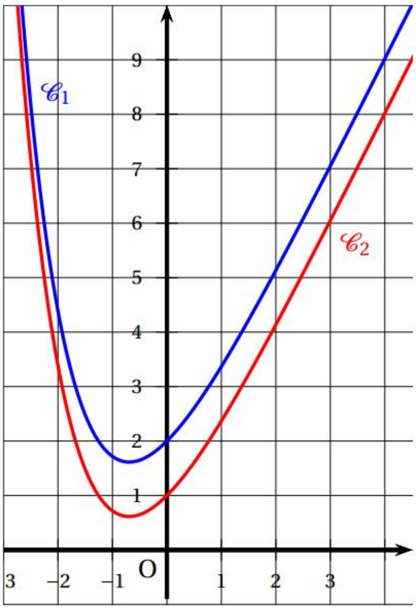
Situation 1



Situation 2 (**$\mathscr{C}_2$ est une droite**)



Situation 3

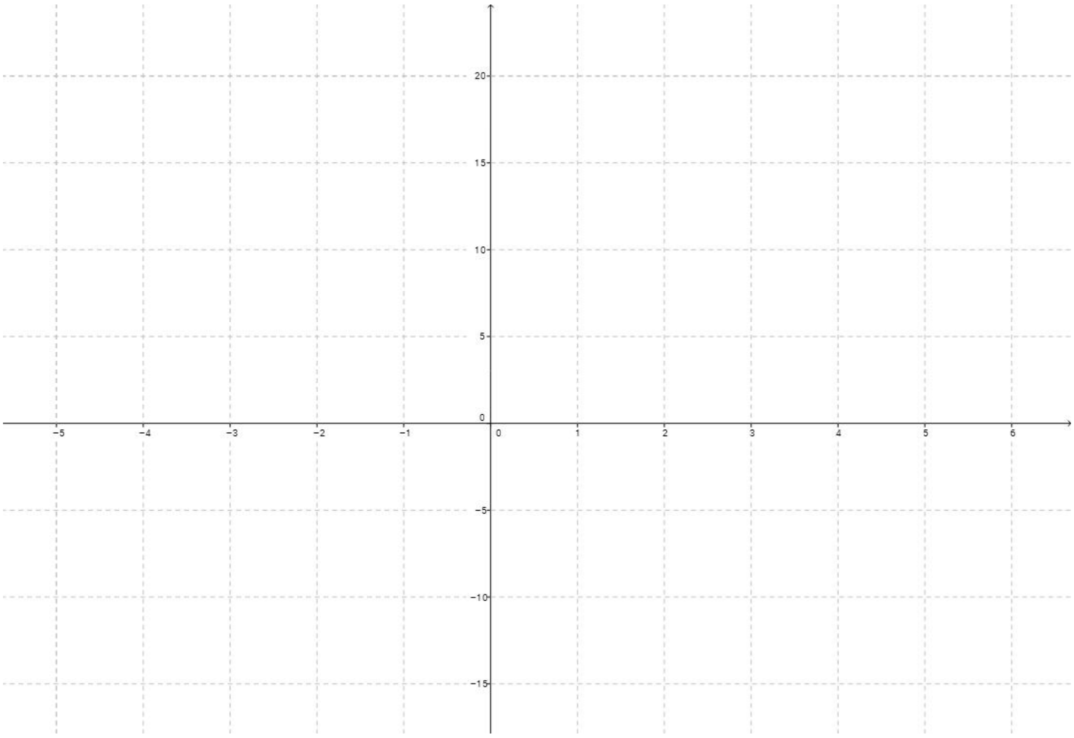


2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.

***Exercice* 8** : /3,5 points

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2x - 15$

1. Tracez la représentation graphique de cette fonction dans le repère ci-dessous pour $x \in [-4\ ;\ 6]$. On note $\mathscr{C}_f$ cette courbe.



2. Construisez le tableau de variations de la fonction f.

3. Montrez que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 a pour équation $y = 4x - 24$; on note $\mathscr{T}$ cette tangente. Construisez la tangente $\mathscr{T}$ dans le repère précédent.

4. A est le point de la courbe d'abscisse 2 ; B est le point de la courbe d'abscisse 4. Quelles sont les coordonnées des points A et B ?

5. Quelle est l'équation de la droite (AB) ?

6. Justifiez que la droite (AB) et la tangente $\mathscr{T}$ sont parallèles.

***Exercice* 9** : /1 point

On dispose d'une ficelle de 21 cm de long. On veut, à l'aide de cette ficelle, construire un rectangle. Proposez la situation qui permettra de construire le rectangle d'aire maximale.

Si vous le pouvez, essayez de généraliser le résultat en répondant à la question suivante : quel est le rectangle, qui, à périmètre fixé, a l'aire la plus grande ?

Toute trace de recherche sera valorisée dans cet exercice.