

**Objectif :** Un laboratoire dispose de 200 échantillons de sang et doit déterminer ceux infectés par un agent pathogène.

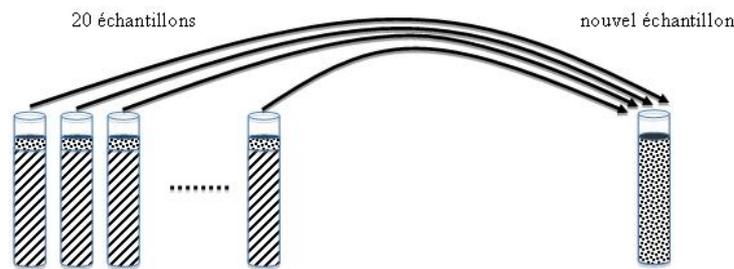
On souhaite minimiser le nombre de tests à réaliser.

Les tests sont supposés être tous parfaitement fiables. On sait que la probabilité qu'un individu soit infecté est égale à 0,05.

**Partie A :**

Dans un premier temps, on répartit ces 200 échantillons en 10 groupes de 20 échantillons. Pour chaque groupe, on effectue le protocole suivant :

1. On réalise un prélèvement sur chacun des 20 échantillons ;
2. On mélange ces prélèvements. On crée ainsi un nouvel échantillon qu'on analyse ;
3. Si le résultat est négatif, c'est qu'aucun des 20 échantillons n'est infecté, et si le résultat est positif, on analyse alors chaque échantillon.



1. Déterminer la probabilité que les 20 échantillons ne soient pas infectés. En déduire celle de l'événement A : « Au moins un des 20 échantillons est infecté ».
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de A dans les 10 groupes. Montrer que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
3. Y est la variable aléatoire égale au nombre total d'analyses effectuées. Justifier que  $Y = 10 + 20 X$ .
4. Calculer alors  $E(X)$ , puis  $E(Y)$ . Comment interprétez-vous ce dernier résultat ?

**Partie B :**

Il est peut-être possible d'améliorer encore l'efficacité de cette méthode. En effet, les 200 échantillons auraient pu être répartis autrement ...

1. Adapter la démarche de la partie A pour une répartition en 50 groupes de 4. Que constatez-vous ?
2. Écrire toutes les répartitions possibles en groupes de même effectif, et indiquer pour chacune le nombre moyen de tests nécessaires. Conclure.

**Partie C :**

Généralisation :

A partir du nombre initial d'échantillons et de la probabilité d'infection, on peut obtenir à l'aide d'un tableur, la répartition en groupes de même effectif permettant de minimiser le nombre moyen de tests.

indications :

- Reprendre le travail précédent et le généraliser à toutes les répartitions possibles de 200 échantillons en groupes ;
- Utiliser le tableur pour « automatiser » les calculs faits précédemment ;
- Se donner la possibilité de modifier la valeur de  $p$  (probabilité qu'un individu soit infectée) initialement égale à 0,05 ;
- Construire une représentation graphique donnant le nombre moyen d'analyses en fonction des répartitions, pour une valeur de  $p$  donnée ;
- Modifier les valeurs de  $p$  et observer les allures de la courbe obtenue ;
- Donner une conclusion générale.