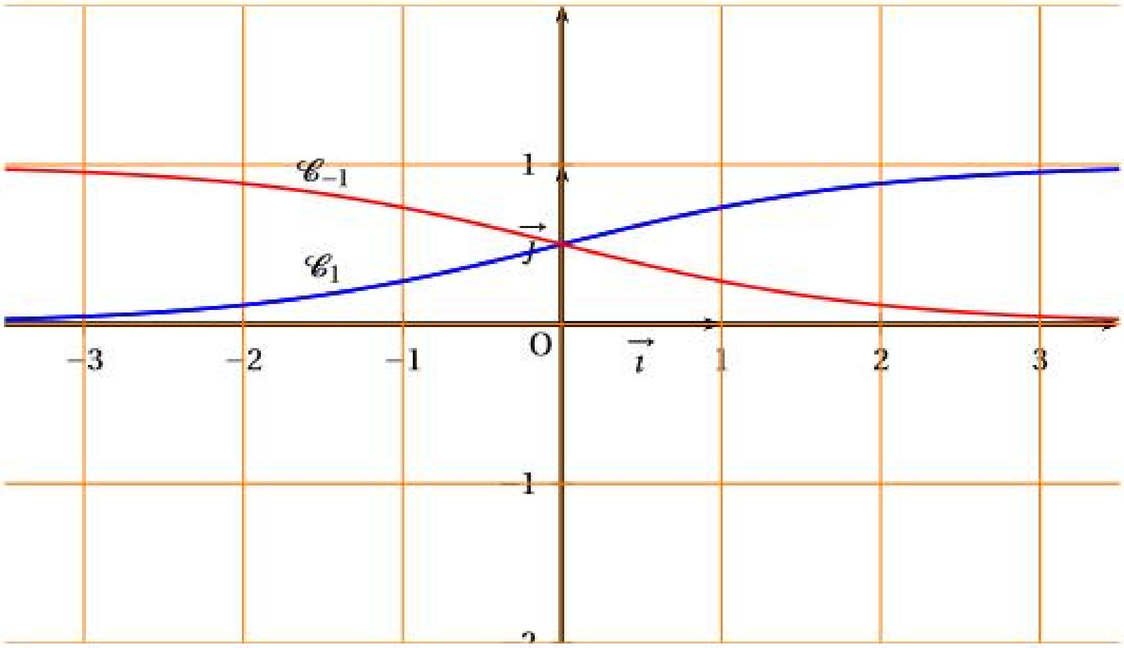
***Exercice* 1** :

Représentations graphiques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{-1}$ des fonctions f_1 et f_{-1}



Partie A

1. Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, il vient, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_1(x) = 1$
   Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, il vient, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_1(x) = 0$
   Graphiquement cela signifie que les droites d'équation $y = 0$ et $y = 1$ sont deux asymptotes horizontales à $\mathscr{C}_1$ au voisinage respectivement de moins et plus l'infini.
2. $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times 1}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$
3. $f_1' = -\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.
   Cette expression étant toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$, il en résulte que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. $$I = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]_0^1 = \ln(1+\mathrm{e}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$$
   I s'interprète graphiquement comme la mesure en unité d'aires du domaine limité par $\mathscr{C}_1$, l'axe des x et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. C'est l'aire du rectangle de côté 1 et de longueur $\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$ qui vaut à peu près 0,62 unité d'aire (ce qui se vérifie visuellement sur l'annexe).

Partie B

$P\left(x\,;\,f_1(x)\right)$ et $M\left(x\,;\,f_{-1}(x)\right)$. K est le milieu de $[MP]$.

1. $f_1(x)+f_{-1}(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+1}=1$
2. $y_K=\dfrac{y_M+y_P}{2}=\dfrac{f_1(x)+f_{-1}(x)}{2}=\dfrac{1}{2}$

   Le point K est donc un point de la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$.
3. Il résulte de la question précédente que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$.
4. Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine considéré. Par symétrie entre les deux courbes, on obtient

$$\mathscr{A}=2\int_0^1 f_1(x)-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}x=2\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)-1\approx 0,24.$$

Partie C

1. **Vrai** : Quel que soit $k\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-kx}>0\Rightarrow 1+\mathrm{e}^{-kx}>1\Rightarrow 0<\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}<1$.
2. **Faux** : On a vu que la fonction f_{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. **Vrai** : Car si $k\geqslant 10$ alors $-\dfrac{1}{2}k\leqslant -5$ puis $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k}\leqslant \mathrm{e}^{-5}$ par croissance de la fonction exponentielle et enfin $1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k}\leqslant 1+\mathrm{e}^{-5}$.

   Finalement :

$$0,99<0,9933\leqslant\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-5}}\leqslant\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k}}=f_k\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exercice **2** :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. On a : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2u_0} = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2u_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$ et

$u_3 = \sqrt{2u_2} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 1.8340$ à 10^{-4} près

b. Cet algorithme permet le calcul du terme de rang n.

c. D'après le tableau des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2.

2. **a.** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

- Initialisation

On a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leqslant 2$

- Hérédité

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0 < u_n \leqslant 2$.

On a : $0 < u_n \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 < 2u_n \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{2u_n} \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 < u_{n+1} \leqslant 2$.

- Conclusion

$0 < u_0 \leqslant 2$

Si $0 < u_n \leqslant 2$ alors $0 < u_{n+1} \leqslant 2$.

D'après l'axiome de récurrence on a pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b. Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\sqrt{2} - \sqrt{u_n}\right)$

Or, on a prouvé que pour tout entier n, $u_n \leqslant 2$, donc $\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{2}$ et donc $\sqrt{2} - \sqrt{u_n} \geqslant 0$

Ainsi, $\sqrt{u_n}\left(\sqrt{2} - \sqrt{u_n}\right)$ est un produit de deux facteurs positifs : il est positif.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$; (u_n) est une suite croissante.

c. On vient de prouver que d'une part la suite (u_n) est strictement croissante et que d'autre part elle est majorée par 2.

Ceci démontre que la suite (u_n) est convergente.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$ donc en particulier :

$v_0 = \ln(u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

On a aussi pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$, mais $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Alors : $v_{n+1} = \ln\sqrt{2u_n} - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) + \ln 2) - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln 2) = \dfrac{1}{2}v_n$

On peut en conclure que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. On déduit de ce qui précède que pour tout entier naturel n, $v_n = -\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$v_n = \ln(u_n) - \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{u_n}{2}\right) = v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{2} = e^{v_n} \Leftrightarrow u_n = 2e^{v_n}$.

On obtient finalement : $u_n = 2e^{-\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

c. Comme $\frac{1}{2} \in [0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x\right) = 1$, alors par composition des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{v_n}\right) = 1$ et finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 2$

d. L'algorithme ci-dessous permet d' afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leqslant 1,999$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie :	Afficher n