***Exercice* 1** :

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}$

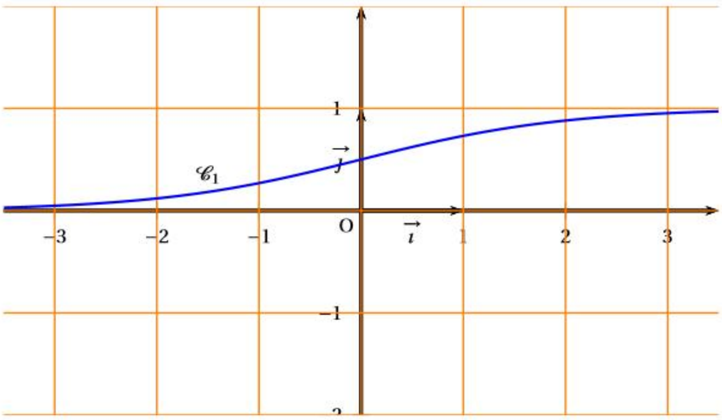
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

La représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est donnée ci-dessous :

Représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1



1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathcal{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ sur la courbe présentée en début d'exercice.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

***Exercice* 2** :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

   b. Que permet de calculer cet algorithme ?

   c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

   b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

   d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	