Proposition de corrigé**Exercice 1 :**

Dans cet exercice, on considère un repère de l'espace $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; on exprimera les coordonnées des points considérés dans ce repère.

1. On considère la droite (D_1) passant par le point $A(1;0;0)$, dirigée par le vecteur $\vec{d}_1(-1;0;1)$.

Montrer l'équivalence suivante :

$M \in (D_1) \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$$

$M(x; y; z) \in (D_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}_1$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t \vec{d}_1$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x-1 = t \times (-1) \\ y-0 = t \times 0 \\ z-0 = t \times 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$$

2. Donner la représentation paramétrique (de paramètre s) de la droite (D_2) passant par le point $B(0;1;0)$, dirigée par le vecteur $\vec{d}_2(1;0;1)$.

$M \in (D_2) \Leftrightarrow$ il existe un réel s tel que :

$$\begin{cases} x=s \\ y=1 \\ z=s \end{cases}$$

(D_1) et (D_2) sont-elles sécantes? Sont-elles parallèles?

$M(x; y; z) \in (D_1) \cap (D_2) \Leftrightarrow$ il existe deux réels t et s tels que :

$$\begin{cases} x=s=1-t \\ y=1=0 \\ z=s=t \end{cases}$$

La relation sur la coordonnée y montre que ce système n'a pas de solution. Ces droites ne sont pas sécantes.

Elles ne sont pas pour autant parallèles! La preuve : (D_1) est dirigée par $\vec{d}_1(-1;0;1)$, et (D_2) est dirigée par $\vec{d}_2(1;0;1)$; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

3. On considère la droite (D'_1) passant par le point $A(1;0;0)$, dirigée par le vecteur $\vec{d}'_1(-1;0;2)$.

Justifier que (D_1) et (D'_1) définissent un plan, que l'on note $\mathcal{P}_1$; donner une représentation paramétrique de ce plan, à l'aide des paramètres t et s .

Ces deux droites sont sécantes (en A); elles ne sont pas parallèles (leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires), donc elles définissent un plan.

$M(x; y; z) \in \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow$ il existe deux réels t et s tels que :

$$\begin{cases} x=1-t-s \\ y=0 \\ z=t+2s \end{cases}$$

4. Montrer que les vecteurs $\vec{d}_1$, $\vec{d}'_1$ et $\vec{d}_2$ sont coplanaires.

Si ces trois vecteurs sont coplanaires, il existe trois réels a , b et c tels que : $a\vec{d}_1 + b\vec{d}'_1 + c\vec{d}_2 = \vec{0}$

Cela se traduit par les relations :

$$\begin{cases} -a - b + c = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Ce système a plusieurs solutions, par exemple : $a = -3$, $b = -2$ et $c = 1$, ce qui montre que : $3\vec{d}_1 = -2\vec{d}'_1 + \vec{d}_2$; ces trois vecteurs sont bien coplanaires.

En déduire la position relative de la droite (D_2) par rapport au plan $\mathcal{P}_1$.

La relation précédente prouve que la droite (D_2) est parallèle au plan $\mathcal{P}_1$ (strictement parallèle).

remarque : on comprend pourquoi elle n'a pas de point commun avec la droite (D_1) , incluse dans le plan $\mathcal{P}_1$.

5. Soit (D'_2) la droite passant par le point $B(0;1;0)$, dirigée par le vecteur $\vec{d}'_2(1;-1;1)$.

Justifier que B , $\vec{d}_2$ et $\vec{d}'_2$ définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}_2$.

$\vec{d}_2$ et $\vec{d}'_2$ sont deux vecteurs non colinéaires ; les droites (D_2) et (D'_2) , sécantes en B définissent le plan $\mathcal{P}_2$.

Quelle est la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$; on attend des justification et le plus de détails possibles pour décrire cette position relative.

Deux approches possibles :

par la géométrie « pure » : $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plans distincts (A appartient à $\mathcal{P}_1$ mais pas à $\mathcal{P}_2$), non parallèles (la droite (D'_2) n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}_1$).

L'intersection de ces deux plans est donc une droite. Reste à caractériser cette droite.

Cette droite passe par l'intersection du plan $\mathcal{P}_1$ et de la droite (D_2) ; en résolvant un système, on trouve que ce point d'intersection (notons le I) a pour coordonnées $(1;0;1)$.

Par ailleurs, on sait que la droite (D_2) est parallèle au plan $\mathcal{P}_1$; la droite d'intersection est la droite parallèle à (D_2) passant par I ; étant parallèle à (D_2) , elle a pour vecteur directeur $\vec{d}_2$.

par les représentations paramétriques : $M(x;y;z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \iff$ il existe 4 réels t , s , m et n tels que :

$$\begin{cases} x=1-t-s=m+n \\ y=0=0 \\ z=t+2s=m+n \end{cases}$$

On a utilisé des représentations paramétriques des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

En faisant évoluer ce système, on trouve :

$M(x;y;z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \iff$ il existe un réel k tel que :

$$\begin{cases} x=1+k \\ y=0 \\ z=1+k \end{cases}$$

On reconnaît la représentation paramétrique de la droite qui passe par $I(1;0;1)$, dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(1;0;1)$ c'est à dire $\vec{d}_2$.