

Exercice 1 :

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X , notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt.$$

On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1 \right).$$

2. En déduire que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe**.

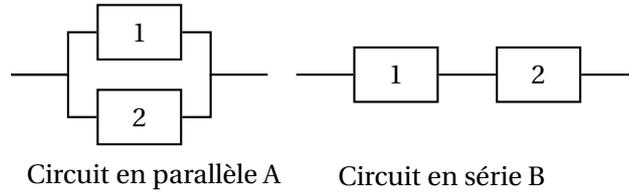
1. Sur le graphique de l'annexe (à rendre avec la copie) :
 - a. Représenter la probabilité $P(X \leq 1)$.
 - b. Indiquer où se lit directement la valeur de λ .
2. On suppose que $E(X) = 2$.
 - a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
 - b. Calculer la valeur de λ .
 - c. Calculer $P(X \leq 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.
 - d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

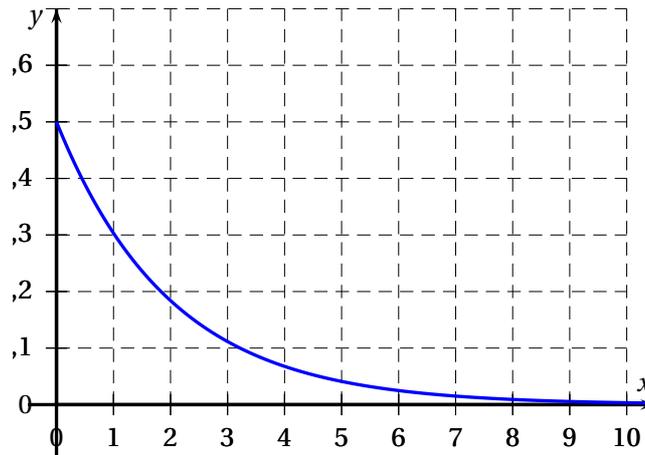
On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

ANNEXE l'exercice 1



Exercice 2 :

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif donné.
On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

- a. Soit c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.
Démontrer que la probabilité $P(c \leq X \leq d)$ vérifie

$$P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

- b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.
- c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X .

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,15$.

- d. Calculer $P(10 \leq X \leq 20)$.
- e. Calculer la probabilité de l'évènement $(X > 18)$.