## Proposition de corrigé

***Exercice* 1** :

Marie-Laure Brunet est l'une des biathlètes les plus adroites au tir à la carabine. Ses statistiques sur la dernière saison donnent 91 % de réussite au tir couché et 88 % de réussite au tir debout.

Lorsqu'elle se présente dans une course de type « relais », quelle est la probabilité qu'elle passe le relais sans avoir fait de tour de pénalité ?

les règlements pour les relais : *à chaque série de tir (couché ou debout), le biathlète dispose de cinq balles et trois autres balles (appelées « pioches ») pour faire tomber les cinq cibles. Si des cibles ne sont pas tombées, il devrait faire autant de tours de pénalité que de cibles restantes.*

*Lors d'un relais, chaque relayeur a une série de tirs couchés et une série de tirs debout à faire.*

Pour répondre au problème, vous expliquerez les simplifications que vous avez dues faire.

On va supposer que les tirs sont indépendants les uns des autres : le résultat de l'un n'influe pas sur un autre. Par ailleurs, on supposera que la fatigue n'intervient pas, que la probabilité de réussite de chaque tir couché est 0,91 et la probabilité de réussite de chaque tir debout est 0,88.

On supposera ainsi que les tirs « couché » et « debout » sont indépendants.

**Méthode n°1 : par une simulation**
A l'aide d'un tableur ou d'un algorithme mis en place sur un logiciel, on va simuler les séances de tirs « couché » ; on va simuler 8 tirs, qui ont chacun une probabilité de 0,91 d'être corrects. On va comptabiliser les séries qui comptent au moins 5 réussites. En simulant de nombreux tirs « couché », on pourra approcher la probabilité de réussite aux tirs « couché », autrement dit la probabilité de sortir de la séances des tirs « couché » sans pénalité :

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Tir 1 | Tir 2 | Tir 3 | Tir 4 | Tir 5 | Tir 6 | Tir 7 | Tir 8 | bilan | | |
| 2 | | =SI(ALEA()<0,91;1;0) | | | | | | | | =SI(SOMME(B3:I3)<5;0;1) | | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 9966 |
| 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 99,66% |
| 5 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| 6 | 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| 7 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |

A l'aide de cette simulation (10 000 séries de 8 tirs simulés), on peut estimer la probabilité de sortir des tirs « couché » sans pénalité à 99,66 %.

En procédant de même, on peut estimer la probabilité de sortir des tirs « debout » sans pénalité à 98,79 %.

En considérant ces évènements indépendants, on peut estimer la probabilité de sortir du relais sans avoir fait un tour sur l'anneau de pénalité à $0,9966 \times 0,9879 = 0,9845$, soit 98,45 %.

**Méthode n°2 : par les probabilités, au plus près de la réalité**
On va ici à nouveau faire des hypothèses d'indépendance des évènements. On va essayer de coller au plus près à la règle du jeu, en distinguant les évènements incompatibles permettant à Marie-Laure de sortir de la séance de tirs « couché » sans avoir à effectuer de tour de pénalité ; on va noter $X$ la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de tirs réussis sur les 5 premiers ; $X$ suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0,91 :

- 5 tirs réussis : $P(X=5)$
- 4 tirs réussis et 1 pioche (parmi 3) réussie : $P(X=4) \times (0,91 + 0,09 \times 0,91 + 0,09^2 \times 0,91)$
- 3 tirs réussis et 2 pioches (parmi 3) réussies : $P(X=3) \times (0,91^2 + 2 \times 0,91^2 \times 0,09)$
- 2 tirs réussis et 3 pioches réussies : $P(X=2) \times 0,91^3$

Si on ajoute le tout, on obtient une probabilité de sortir du tir « couché » sans avoir fait de tour de pénalité égale à 0,9966.

En procédant de la même manière pour le tir « debout », on obtient une probabilité de sortir sans avoir fait de tour de pénalité égale à 0,9903.

En considérant les deux évènements comme indépendants, on trouve une probabilité de faire un relais sans avoir fait de tour de pénalité égale à 0,9869.

**Méthode n°3 : par les probabilités, en modélisant**
On fait à nouveau ici les hypothèses sur l'indépendance des tirs. On va modéliser la situation en disant que Marie-Laure a 8 tirs possibles, avec une probabilité de réussite à chaque tir « couché » de 0,91 et on va donner la probabilité de réussir au moins 5 tirs sur ces 8.

En notant $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis (cette variable suit une loi binomiale de paramètres 8 et 0,91), on cherche à calculer $P(X \geqslant 5)$

Cela donne : $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4)$ ; la calculatrice donne une valeur approchée de $P(X \leqslant 4) \approx 0,0034$

Ainsi, $P(X \geqslant 5) \approx 0,9966$.

On procède de même pour le tir « debout », avec une variable aléatoire $Y$ comptant le nombre de tirs réussis, sur 8, avec une probabilité de réussite à chaque tir de 0,88. $Y$ suit une loi binomiale de paramètres 8 et 0,88.

On cherche : $P(Y \geqslant 5) = 1 - P(Y \leqslant 4)$ ; la calculatrice donne une valeur approchée de $P(Y \leqslant 4) \approx 0,0097$

Ainsi, $P(Y \geqslant 5) \approx 0,9903$.

Au final, on obtient : $P((X \geqslant 5) \cap (Y \geqslant 5)) = P(X \geqslant 5) \times P(Y \geqslant 5) \approx 0,9966 \times 0,9903 \approx 0,9869$

**quelques remarques**
- comment être « sûr » que la simulation (de la méthode 1) est suffisamment précise pour donner une estimation de la probabilité recherchée ?
- les résultats numériques des méthodes 2 et 3 sont identiques : est-ce un hasard ?

***Exercice* 2** :

Pour $k$ réel, on considère la fonction $f_k$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$
Déterminer les limites de $f_k$ en $-\infty$ et en $+\infty$ en distinguant les cas $k < 0$ et $k > 0$.

pour $k > 0$ :

* limite en $-\infty$ :

$\lim\limits_{x\to-\infty} kx = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ : par composition des limites, on en déduit que :
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{kx} = 0$
En faisant le produit par $(x+1)$, on va obtenir une forme indéterminée ; on sait que c'est l'exponentielle qui va « l'emporter » ; pour le prouver proprement, doit retrouver un résultat du cours, du type $Xe^X$ c'est pourquoi on va faire apparaître une écriture du type $kx \times e^{kx}$ dans l'expression de $f_k$

$f_k(x) = (x+1)e^{kx} = \frac{1}{k}\left(kx \times e^{kx}\right) + e^{kx}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} kx = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ : par composition des limites, on en déduit que :
$\lim\limits_{x\to-\infty} kx \times e^{kx} = 0$

En fin, par addition de limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{kx} = 0$

* limite en $+\infty$ :

d'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$

d'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} kx = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ : par composition des limites, on en déduit que :
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{kx} = +\infty$

Par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} kx \times e^{kx} = +\infty$

pour $k < 0$ :

* limite en $-\infty$ :

d'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$

d'autre part : $\lim\limits_{x\to-\infty} kx = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ : par composition des limites, on en déduit que :
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{kx} = +\infty$

Par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} kx \times e^{kx} = -\infty$

* limite en $+\infty$ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} kx = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ : par composition des limites, on en déduit que :
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{kx} = 0$
En faisant le produit par $(x+1)$, on va obtenir une forme indéterminée ; on sait que c'est l'exponentielle qui va « l'emporter » ; pour le prouver proprement, doit retrouver un résultat du cours, du type $Xe^X$ c'est pourquoi on va faire apparaître une écriture du type $kx \times e^{kx}$ dans l'expression de $f_k$

$f_k(x) = (x+1)e^{kx} = \frac{1}{k}\left(kx \times e^{kx}\right) + e^{kx}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} kx = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ : par composition des limites, on en déduit que :
$\lim\limits_{x\to-\infty} kx \times e^{kx} = 0$

En fin, par addition de limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{kx} = 0$