Proposition de corrigé

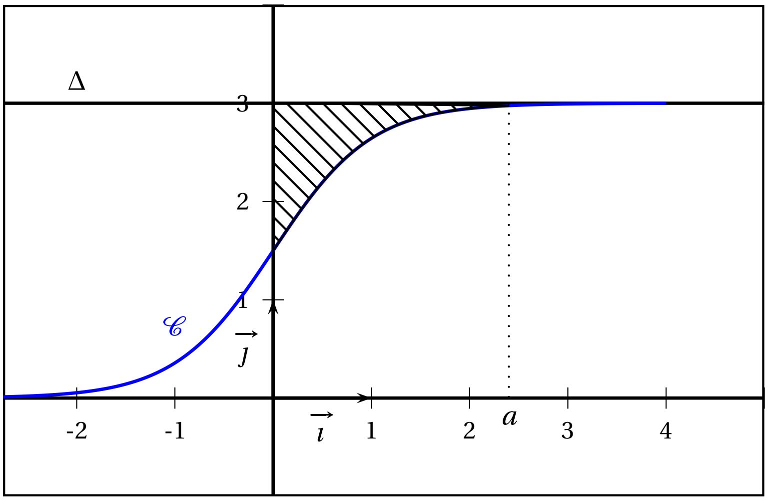
***Exercice* 1 :**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   On sait que $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ quel que soit le réel x, donc $1+\mathrm{e}^{-2x} > 1 > 0$. Le dénominateur étant non nul, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle la fonction étant de la forme $\frac{3}{u(x)}$, avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-2x}$, donc $u'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$ on a :
   $f'(x) = -\frac{3u'(x)}{(u(x))^2} = -\frac{3\times(-2)\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2} = \frac{6\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2} > 0$ car quotient de deux nombres supérieurs à zéro. la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme le laisse supposer le graphique).

2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et en posant $X = -2x$, $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$, d'où
   $\lim\limits_{X\to-\infty} 1+\mathrm{e}^{X} = 1$ et enfin par quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$: ceci montre que la droite (Δ) d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante de $f(0) = \frac{3}{1+1} = 1,5$ à 3 : il existe donc un réel unique $\alpha \in [0 ; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2,999$.
   La calculatrice donne :

$f(4) \approx 2{,}99899$ et $f(5) \approx 2{,}9999$, donc $4 < \alpha < 5$;
$f(4,0) \approx 2{,}99899$ et $f(4,1) \approx 2{,}9992$, donc $4,0 < \alpha < 4,1$;
$f(4,00) \approx 2{,}99899$ et $f(4,01) \approx 2{,}99901$, donc $4,00 < \alpha < 4,01$ (encadrement à 10^{-2} près).

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

On a vu dans la partie A que $0 < f(x) < 3 \iff -f(x) < 0 < 3 - f(x)$, soit $h(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)$.
Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$H'(x) = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}+3-3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}+3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = 3 - f(x) = h(x)$.
Donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif.

a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

On a vu que sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur l'intervalle $[0 ; a]$ (avec $a >$), la fonction h est positive, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$ est égale en unités d'aire à la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de h, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.
Mais comme $h(x) = 3 - f(x)$, cette surface est la surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ (voir l'aire hachurée ci-dessus).

b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

D'après la question **B. 2.**, on a :
$\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = [H(x)]_0^a = H(a) - H(0) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times a}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times 0}\right) = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times a}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

c. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan défini par
$\left\{\begin{array}{lll} x & \geqslant & 0 \\ f(x) & \leqslant y & \leqslant 3 \end{array}\right.$
Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

D'après la question précédente, on sait que l'aire de $\mathscr{D}_a$, surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ est égale à $\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-2x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right) = 2$, donc finalement par composition, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right) = \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1,04$ (u. a.)

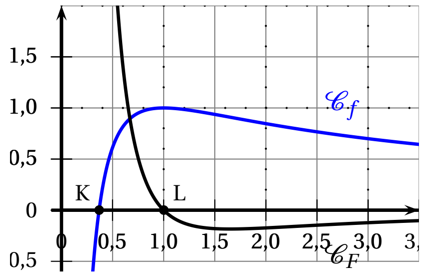
***Exercice* 2** :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

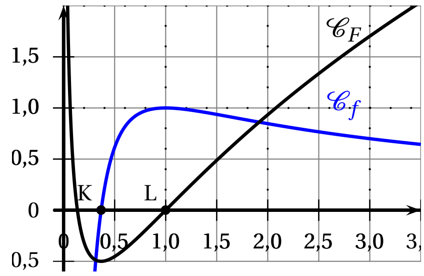
$$f(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

1. Dans les trois situations suivantes, on a dessiné, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et une courbe $\mathscr{C}_F$. Dans une seule situation, la courbe $\mathscr{C}_F$ est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f. Laquelle ? Justifier la réponse.

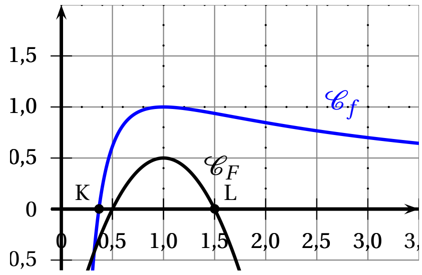
Situation 1



Situation 2



Situation 3



Comme F est une primitive de f, alors f est la dérivée de F donc les variations de F sont données par le signe de f : F est croissante si et seulement f est positive
C'est donc dans la situation 2 que la courbe C_F est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f.

2. Dans la situation retenue à la question 1, on appelle :

- K le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses et $\mathscr{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées ;
- L le point d'intersection de $\mathscr{C}_F$ et de l'axe des abscisses, ayant une abscisse supérieure à $\frac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

L'abscisse du point L est l'abscisse du point en lequel la fonction f atteint son maximum (*voir remarque*), nombre pour lequel la dérivée de f s'annule et passe du positif au négatif.

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) \times 1}{x^2} = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ s'annule pour $x = 1$.

Pour $0 < x < 1$, $\ln x < 0$ donc $f'(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2} > 0$, donc f est croissante.

Pour $1 < x$, $\ln x > 0$ donc $f'(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2} < 0$, donc f est décroissante.

La fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,1]$ puis décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$; sa dérivée s'annule pour $x = 1$ donc la fonction f admet un maximum pour $x = 1$ et le point L a pour abscisse 1.

Remarque – Il aurait été préférable que le texte précise, par exemple, que l'abscisse du point L était un nombre entier, car rien ne dit dans le texte – hormis le graphique – que le point L a pour abscisse l'abscisse du point en lequel la fonction f atteint son maximum.

a. Déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathscr{D}$ et Δ, par la courbe $\mathscr{C}_f$ et par l'axe des abscisses.

L'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathscr{D}$ et Δ, par la courbe $\mathscr{C}_f$ et par l'axe des abscisses a une valeur approchée de 0,5 (aire du rectangle coloré en gris sur le graphique).

b. Peut-on déterminer la valeur exacte de cette aire ?

Deux méthodes :

- **une méthode graphique** : graphiquement on peut lire que $F(1) = 0$ et que $F\left(\mathrm{e}^{-1}\right) \approx -0,5$; donc l'aire est approximativement égale à 0,5.
- **une méthode numérique** : pour avoir la valeur exacte de l'aire, il faut déterminer une primitive de f.
  $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} \times \ln x$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ a pour primitive sur $[0\,;\infty[$ la fonction $x \longmapsto \ln x$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x} \times \ln x$ est de la forme $u'u$, où $u(x) = \ln x$, donc a pour primitive $\dfrac{u^2}{2}$ soit la fonction $x \longmapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$. Donc la fonction f a pour primitive $x \longmapsto \ln x + \dfrac{(\ln x)^2}{2}$.

$$\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} = \left(\ln 1 + \frac{(\ln 1)^2}{2}\right) - \left(\ln \mathrm{e}^{-1} + \frac{(\ln \mathrm{e}^{-1})^2}{2}\right)$$

$\ln 1 = 0$ et $\ln \mathrm{e}^{-1} = -1$ donc $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$