

DM n°5 : trois méthodes fondamentales d'algèbre et d'analyse

Consigne : avant de répondre aux questions 1 à 8, écrire clairement si la question est :

- un calcul ;
- une équation ;
- une démonstration d'identité.

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction $g : x \mapsto 2(x+1)^2 - 8$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2(x+3)(x-1)$

$$\text{d'une part, } 2(x+1)^2 - 8 = 2(x^2 + 2x + 1) - 8 = 2x^2 + 4x + 2 - 8 = 2x^2 + 4x - 6$$

$$\text{d'autre part, } 2(x+3)(x-1) = 2(x^2 - x + 3x - 3) = 2(x^2 + 2x - 3) = 2x^2 + 4x - 6$$

Cela permet de conclure que $g(x) = 2(x+3)(x-1)$ pour tout nombre réel x

Cette question est une démonstration d'identité.

2. Calculer $g(-3)$

$$g(-3) = 2(-3+3)(-3-1) = 0$$

Cette question est un calcul ; on a le choix de l'expression de g .

3. Résoudre $g(x) = 0$

$$g(x) = 0 \iff 2(x+3)(x-1) = 0 \iff x+3 = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \iff x = -3 \text{ ou } x = 1$$

Cette question est une résolution d'équation ; équation type « produit nul » ici.

4. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 + 4x - 6$

On l'a déjà vérifié dans les calculs faits à la question 1.

Cette question est une démonstration d'identité.

5. Résoudre $g(x) = -6$

$$g(x) = -6 \iff 2x^2 + 4x - 6 = -6 \iff 2x^2 + 4x = 0 \iff 2x(x+2) = 0$$

$$\text{Ainsi, } g(x) = -6 \iff x = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -2$$

Cette question est une résolution d'équation ; par des transformations algébriques, on s'est ramené à une équation type « produit nul ».

6. Calculer $g(0)$

$$g(0) = 2 \times 0^2 + 4 \times 0 - 6 = -6$$

Cette question est un calcul ; on a le choix de l'expression de g .

7. Déterminer l'image de -1

$$\text{En d'autres termes, on demande } g(-1) : g(-1) = 2(-1+1)^2 - 8 = -8$$

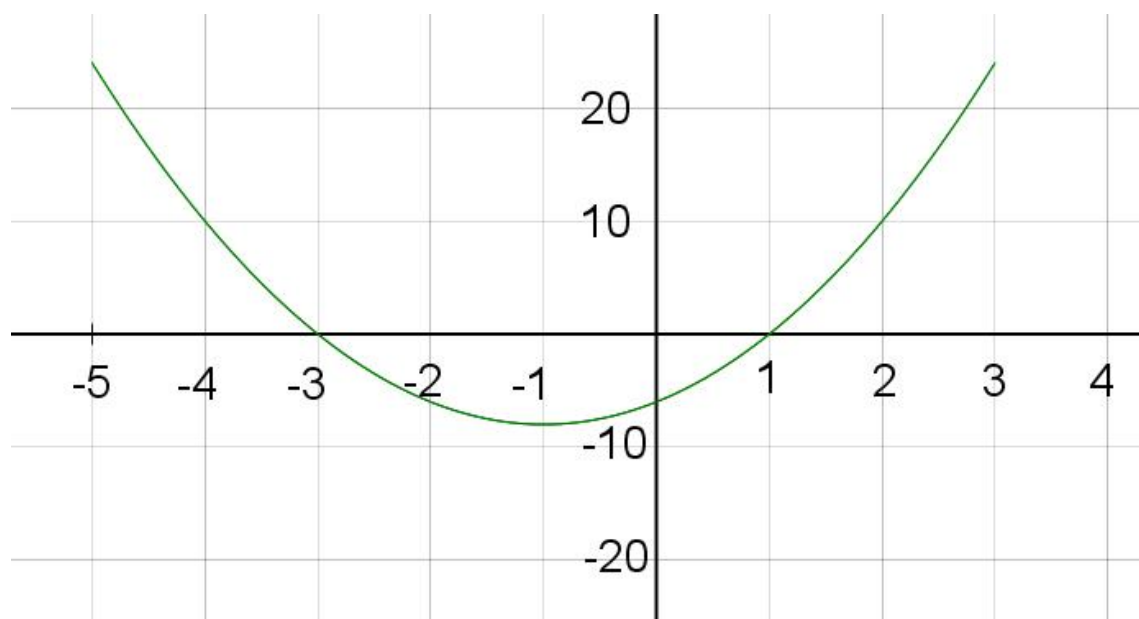
Cette question est un calcul ; on a le choix de l'expression de g .

8. Résoudre $g(x) = -8$

$$g(x) = -8 \iff 2(x+1)^2 - 8 = -8 \iff 2(x+1)^2 = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1$$

Cette question est une résolution d'équation ; il faut choisir la forme la plus adaptée pour la résoudre.

9. Dans un repère que vous tracerez avec des abscisses allant de -5 à +3, représenter la fonction g .



NB : à vous de bien choisir l'échelle.

Papier millimétré conseillé : vous pouvez en imprimer depuis mon site.

DM n°6 : utiliser et rédiger correctement avec les vecteurs

Consigne : l'objectif principal de ce DM est de travailler votre rédaction avec l'outil « vecteur ».

La plupart des questions contiennent les réponses : on attend donc des compétences de méthodes, de raisonnement, de calcul ; on ne se contente pas de recherche intuitive.

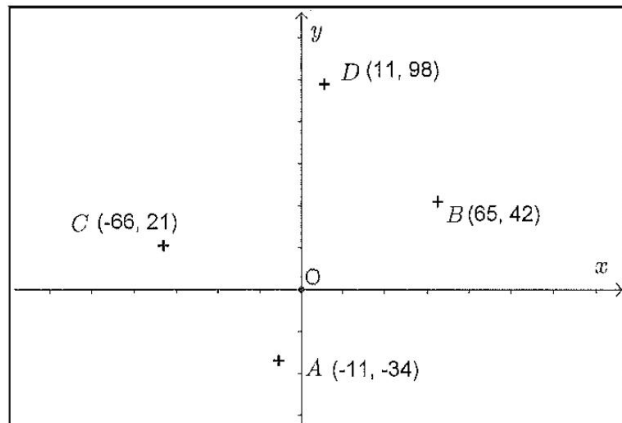
Être efficace : lorsque vous avez correctement rédigé l'application d'une méthode, vous pouvez, si vous l'utilisez à nouveau, donner directement les résultats (par exemple issus d'algorithme de votre calculatrice)

Énoncé :

On se place dans un repère ortho-normé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ci-contre.

Les abscisses y sont classiquement notées x , les ordonnées y .

Quatre points sont définis par leurs coordonnées A , B , C et D .



Questions :

1. Montrer que le quadrilatère $ABDC$ n'est pas un parallélogramme, puis déterminer par le calcul les coordonnées de E tel que $ABEC$ est un parallélogramme.

Preuve de : $ABDC$ n'est pas un parallélogramme :

$ABDC$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Or, $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(65 - (-11) ; 42 - (-34)) = (76 ; 76)$ et $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(11 - (-66) ; 98 - 21) = (77 ; 77)$: ces deux vecteurs ne sont pas égaux, ce qui prouve que $ABDC$ n'est pas un parallélogramme.

Recherche des coordonnées du point E :

$ABEC$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$

le vecteur $\overrightarrow{CE}$ a pour coordonnées : $(x_E - (-66) ; y_E - 21)$

On a donc les deux équations : $x_E + 66 = 76$ et $y_E - 21 = 76$ ce qui donne au final $E(10 ; 97)$

2. Montrer que $ABDC$ est un trapèze, et préciser quelles en sont les deux bases (c'est-à-dire les côtés parallèles).

$ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$ $\iff (AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

Or, $\overrightarrow{AB}(76 ; 76)$ et $\overrightarrow{CD}(77 ; 77)$: on passe des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à celles du vecteur $\overrightarrow{CD}$ en multipliant par $\frac{77}{76}$.

remarque : il y a d'autres manières de voir que ces vecteurs sont colinéaires entre eux ; la plus simple est peut être de remarquer qu'ils sont tous deux colinéaires au vecteur de coordonnées $(1 ; 1)$.

3. Montrer que l'angle $\widehat{BAC}$ est un angle droit.

On va pour cela utiliser la réciproque du théorème de Pythagore; on a besoin de connaître les longueurs AB , BC et AC ; on détaille le calcul pour l'une d'elles :

$$AB = \sqrt{(65 - (-11))^2 + (42 - (-34))^2} = \sqrt{76^2 + 76^2} = \sqrt{5776 + 5776} = \sqrt{11\,552}$$

On trouve ensuite : $BC = \sqrt{17\,602}$ et $AC = \sqrt{6\,050}$

Ainsi, $BC^2 = 17\,602$ et $AC^2 + AB^2 = 6\,050 + 11\,552 = 17\,602$: par la réciproque du théorème de Pythagore, on conclut que le triangle ABC est rectangle en A , autrement dit, que l'angle $\widehat{BAC}$ est un angle droit.

4. Montrer que l'aire du trapèze $ABDC$ est égale à 8415 (dans l'unité d'aire du repère).

On trouve la formule : $\mathcal{A}_{\text{trapeze}} = \frac{\text{Base} + \text{base}}{2} \times h$

Ici, la grande base est $[CD]$; elle a pour longueur $\sqrt{2 \times 77^2} = 77\sqrt{2}$

La petite base est $[AB]$; elle a pour longueur $\sqrt{2 \times 76^2} = 76\sqrt{2}$

Comme il y a un angle droit en A (question précédente), la hauteur du trapèze est la longueur AC qui vaut $\sqrt{2 \times 55^2} = 55\sqrt{2}$

Ainsi,

$$\mathcal{A}_{\text{trapeze}} = \frac{77\sqrt{2} + 76\sqrt{2}}{2} \times 55\sqrt{2} = \frac{143\sqrt{2}}{2} \times 55\sqrt{2} = 143 \times 55 \times \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 153 \times 55 = 8\,415$$

L'aire du trapèze $ABDC$ est exactement égale à 8 415 unités d'aire.

NB : vous chercherez et trouverez facilement l'aire d'un trapèze.

Coupe de pouce :

Quel que soit le nombre x positif : $\sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$