une famille de fonctions

Pour k réel, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$

1. Quelle est la nature de f_0 ?

$f_0(x) = (x+1)e^{0\times x} = x+1$: c'est une fonction affine.

2. Étudier le signe de $(x+1)(e^x - 1)$.

On va faire un tableau de signe en remarquant que : $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe $(x+1)$		-		+		+	
signe $e^x - 1$		-		-		+	
signe $(x+1)(e^x-1)$		+		-		+	

3. En déduire les positions relatives des courbes représentant les fonctions f_k et f_{k+1}.

On calcule $f_{k+1}(x) - f_k x$:

$f_{k+1}(x) - f_k x = (x+1)e^{(k+1)x} - (x+1)e^{kx} = (x+1)e^{kx}(e^x - 1)$

Cette expression a le même signe que $(x+1)(e^x-1)$ puisque e^{kx} est toujours strictement positif.

Ainsi, la courbe représentant f_{k+1} va être au-dessus de la courbe représentant f_k sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1] \cup [0\,;\,+\infty[$. Elle est en dessous sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$.

4. Étudier le sens de variation de f_k pour $k < 0$ et $k > 0$.

La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$; on obtient :

$f'_k(x) = e^{kx} + k(x+1)e^{kx} = e^{kx}(1 + k(x+1))$

Pour connaître le signe de f'_k, il suffit d'étudier le signe de $1 + k(x+1)$ (l'exponentielle étant strictement positive) :

$1 + k(x+1) > 0 \iff kx > -1 - k$

<u>Si $k > 0$</u> : on peut diviser par k sans changer le sens de l'inégalité.

On obtient alors : $f'_k > 0 \iff x > \dfrac{-1-k}{k} \iff x > -1 - \dfrac{1}{k}$

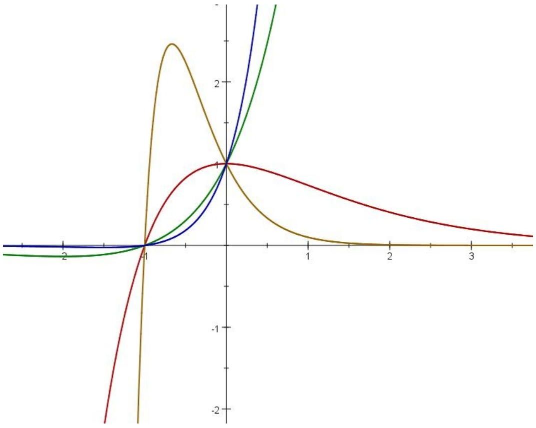
la fonction f_k est donc décroissante sur $\left]-\infty\,;\,-1-\dfrac{1}{k}\right]$ puis croissante sur $\left[-1-\dfrac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$

<u>Si $k < 0$</u> : on peut diviser par k mais il faut changer le sens de l'inégalité.

On obtient alors : $f'_k > 0 \iff x < \dfrac{-1-k}{k} \iff x < -1 - \dfrac{1}{k}$

la fonction f_k est donc croissante sur $\left]-\infty\,;\,-1-\dfrac{1}{k}\right]$ puis décroissante sur $\left[-1-\dfrac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$

5. Les courbes ci-dessous représentent les fonctions f_k obtenues pour $k = -1$, $k = -3$, $k = 1$ et $k = 2$.



Identifier chaque courbe en justifiant la réponse.

Les fonctions d'abord croissantes puis décroissantes ont une valeur de k négatives : c'est le cas des courbes marron et rouge.

Par ailleurs, si k est plus grand que k', la courbe représentant f_k sera au dessus de celle représentant $f_{k'}$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1] \cup [0\,;\,+\infty[$.

On en déduit que la courbe marron représente la fonction f_{-3} et que la courbe rouge représente la fonction f_{-1}.

Par des arguments du même type, on obtient : la courbe verte représente f_1 et la courbe bleue représente f_2.