

Exercice 1 :

Une personne a entendu dire que la probabilité de gagner à un jeu (jeu à gratter au bureau de tabac) est égale à $\frac{1}{10}$. On supposera que le fait de gagner à un grattage est indépendant des autres grattages. Cette personne se dit qu'il va donc jouer 10 fois et qu'il sera sûr de gagner quelque chose. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1.
 - a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
 - b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
 - c. Déterminer l'espérance de X .
 - d. Conclure quant au fait qu'il « soit sûr » de gagner au moins une partie.
2. Le joueur a développé une addiction forte aux jeux. Il joue 100 cartes à gratter.
 - a. A votre avis, combien de parties va-t-il gagner?
 - b. Quelle est la probabilité de gagner exactement 10 fois? Au vu du résultat, allez-vous parier qu'il va gagner 10 fois?
 - c. Il a gagné 14 parties et est donc convaincu qu'il est dans un jour de chance exceptionnel; qu'en pensez-vous?

Pour vous aider à argumenter votre réponse, on vous donne ci-dessous un extrait de la loi de probabilité d'une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1}{10}$, ainsi que les probabilités cumulées ($P(X \leq k)$). On pourra déterminer à l'aide de ce tableau l'intervalle de fluctuation à 95 % du nombre de parties gagnées par le joueur, lorsqu'il fait 100 parties avec une probabilité de $\frac{1}{10}$ de gagner à chaque partie.

k	P(X=k)	P(X≤k)
0	2,6561E-005	2,6561E-005
1	0,000295127	0,000321688
2	0,001623197	0,001944885
3	0,005891602	0,007836487
4	0,015874596	0,023711083
5	0,033865804	0,057576886
6	0,059578729	0,117155615
7	0,088895246	0,206050862
8	0,114823027	0,320873888
9	0,130416277	0,451290165
10	0,131865347	0,583155512
11	0,119877588	0,7030331
12	0,098788012	0,801821113
13	0,074302095	0,876123207
14	0,051303827	0,927427035
15	0,032682438	0,960109473
16	0,019291717	0,97940119
17	0,010591531	0,989992721
18	0,005426525	0,995419246
19	0,002602193	0,998021439
20	0,001170987	0,999192426
21	0,000495656	0,999688082
22	0,000197762	0,999885844
23	7,4519E-005	0,999960363
24	2,6565E-005	0,999986927
...	...	...
99	9,0000E-098	1
100	1,0000E-100	1

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout nombre réel x , $e^x \geq x + 1$ (une relation de ce type sera utilisée pour démontrer que la fonction exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$)

1. Conjecturer ce résultat par une approche graphique (décrivez votre démarche et vos observations).
 2. On introduit la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par : $d(x) = e^x - x - 1$
 - a. étudier la fonction d sur $\mathbb{R}$, en particulier le fait qu'elle atteint un minimum.
 - b. Grâce à l'étude précédente, démontrer le résultat attendu.
-