

Exercice 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation

$$(E): z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.
 - a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).
 - b. Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
 - c. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$.
4. Calculer les longueurs $M_1 M_2$ et $M_2 M_3$.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$,
 $M_n M_{n+1} = 2^n \sqrt{3}$.
5. On note $\ell^n = M_1 M_2 + M_2 M_3 + \dots + M_n M_{n+1}$.
 - a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ell^n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
 - b. Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell^n \geq 1000$.

Exercice 2 :

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2i, \quad b = -\sqrt{3} + i, \quad c = 1 + i\sqrt{3}, \quad d = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad e = -1 + (2 + \sqrt{3})i.$$

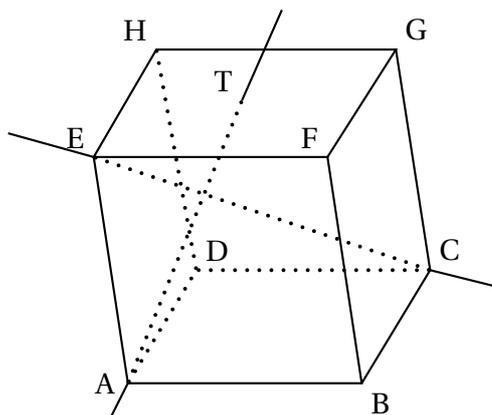
1. **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $I(1; 0; 0)$, $J(0; 1; 0)$ et $K(0; 0; 1)$.

Affirmation 3 : la droite \mathcal{D} de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$, coupe le plan (IJK) au point $E\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.

Annexe pour l'exercice 1

