Proposition de corrigé

***Exercice* 1** :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}$.

$$\left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Or $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Donc le nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ a pour module $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{6}$ donc sa forme exponentielle est $\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2. **a.** Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n\right| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n$$

Donc la suite (r_n) est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = |z_0| = 1$.

b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

La suite (r_n) est géométrique donc, pour tout n, $r_n = r_0 \times q^n$, donc $r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

$OA_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

(r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$; or $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc la suite (r_n) converge vers 0. La longueur OA_n tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que $R > P$ n prend la valeur $n+1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

On fait tourner l'algorithme donné dans le texte en prenant pour P la valeur $0,5$:

	n	R	P	$R > P$
Initialisations	0	1	0,5	Vrai
Traitement	1	0,866	0,5	Vrai
	2	0,75	0,5	Vrai
	3	0,6495	0,5	Vrai
	4	0,5625	0,5	Vrai
	5	0,487	0,5	Faux
Sortie	Afficher 5			

La valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$ est 5.

b. Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Cet algorithme s'arrête dès que $R < P$ et affiche alors n, c'est-à-dire qu'il affiche la plus petite valeur de n pour laquelle R donc $r_n = OA_n$ est inférieur ou égal à P.
On peut donc dire que $OA_{32} > 0,01$ et que $OA_{33} < 0,01$.
Vérification à la calculatrice : $r_{32} \approx 0,010\,002$ et $r_{33} \approx 0,008\,68$.

4. **a.** Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

On considère le triangle OA_nA_{n+1}.
$OA_n = r_n$ donc $(OA_n)^2 = r_n^2$
$OA_{n+1} = r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n$ donc $(OA_{n+1})^2 = \frac{3}{4}r_n^2$
$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} - 1\right)z_n - z_n\right| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} - 1 - 1\right)z_n\right| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| \times |z_n|$

$= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \times r_n = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}}r_n = \sqrt{\frac{4}{16}}r_n = \frac{1}{2}r_n$ donc $(A_nA_{n+1})^2 = \frac{1}{4}r_n^2$

$(A_nA_{n+1})^2 + (OA_{n+1})^2 = \frac{1}{4}r_n^2 + \frac{3}{4}r_n^2 = r_n^2 = (OA_n)^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

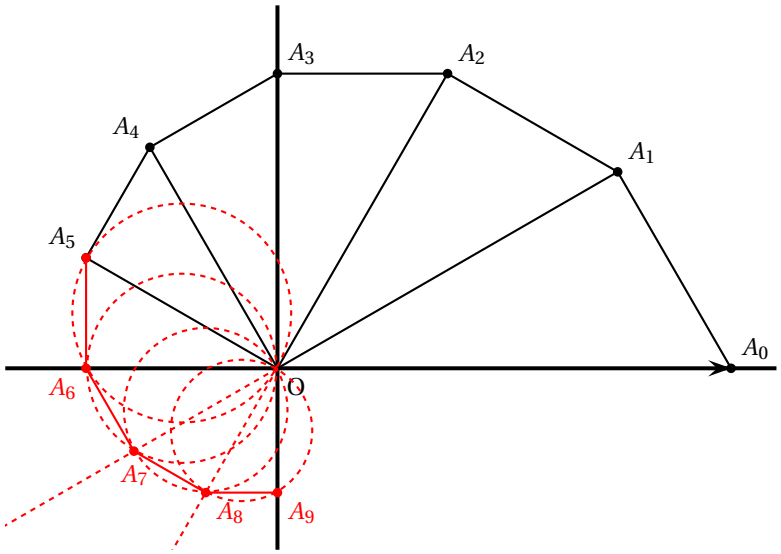
b. On admet que $z_n = r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

Le point A_n, d'affixe z_n, appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son argument est $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ modulo 2π, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ modulo π, donc il peut s'écrire $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Le nombre z_n a pour argument $\frac{n\pi}{6}$; $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff n = 3 + 6k$.
Mais n est un entier naturel donc k doit être strictement positif donc appartenir à $\mathbb{N}$.
Donc si n s'écrit $3 + 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors le point A_n appartient à l'axe des ordonnée

c. Compléter la figure ci-dessous, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
Les traits de construction seront apparents.

Le point A_6 a pour affixe z_6 qui a pour argument $\frac{6\pi}{6} = \pi$; ce point est donc sur l'axe des abscisses. Comme le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_6, on trace le cercle de diamètre $[OA_5]$; le point A_6 est à l'intersection de ce cercle et de l'axe des abscisses.
Le point A_7 a pour affixe z_7 qui a pour argument $\frac{7\pi}{6}$; donc les points A_1, O et A_7 sont alignés.
Le point A_7 se trouve donc à l'intersection du cercle de diamètre $[OA_6]$ et de la droite (OA_1).
Etc. (Voir figure ci-dessous)
Remarque : les points A_3 et A_9 appartiennent à l'axe des ordonnées, ce qui correspond bien à la réponse trouvée à la question **4.b.**



Exercice 2 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.
Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie et justifiera son choix.

li est attribué un point par réponse correcte et convenablement justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

, La droite $\mathscr{D}$ est définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 5-2t \\ y &= 1+3t \\ z &= 4 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$.
   - **a.** La droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
   - **b.** La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
   - **c.** La droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

   RÉPONSE b.

   La droite $\mathscr{D}$ est définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 5-2t \\ y &= 1+3t \\ z &= 4 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   $\mathscr{P}$ est le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$. La droite $\mathscr{D}$ est déterminée par le point $B(5;1;4)$ et son vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$, le plan $\mathscr{P}$ne contient pas B car $3x_A+2y_A+z_A-6 = 15+2+4-6 \neq 0$, donc la droite $\mathscr{D}$ n'est pas incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

   $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$; on a $\vec{n} \perp \vec{v}$ puisque leur produit scalaire vaut 0 : $(-2)\times 3+2\times 3+0=0$, donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$

2. On note $\mathscr{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées (3 ; 1 ; 1) et a pour vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.
   - **a.** Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.
   - **b.** Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes.
   - **c.** Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

   RÉPONSE b.

   $\mathscr{D}'$ la droite qui passe par le point A de coordonnées (3 ; 1 ; 1) et a pour vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

   Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont parallèles, car leur vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, les deux colonnes de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\(-1)\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ne sont pas proportionnelles.

   Donc elles sont soit sécantes, soit ne sont pas coplanaires.

   Un système d'équation paramétrique de $\mathscr{D}'$ est $\begin{cases} x &= 3+2u \\ y &= 1-u \\ z &= 1+2u \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$

   On résout le système en t et u :

$$(S):\begin{cases} 3+2u &= 5-2t \\ 1-u &= 1+3t \\ 1+2u &= 4 \end{cases} \quad (S):\begin{cases} u &= 1,5 \\ 3+3 &= 5-2t \\ 1-1,5 &= 1+3t \end{cases} \quad (S):\begin{cases} u &= 1,5 \\ t &= -0,5 \end{cases}$$

Les deux droites sont donc sécantes au point $C(6\,;\,-0,5\,;\,4)$.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

3. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$.

a. $\mathscr{E}$ est l'axe des abscisses.

b. $\mathscr{E}$ est l'axe des ordonnées.

c. $\mathscr{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

RÉPONSE a. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$. Si on considère D d'affixe $(-\mathrm{i})$ et F d'affixe i, alors $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M tels que $DM = FM$ est donc la médiatrice de $[DF]$, c'est l'axe des x.

4. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

a. Le triangle OBC est isocèle en O.

b. Les points O, B, C sont alignés.

c. Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

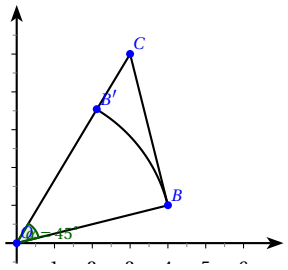
RÉPONSE c. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives sont notées b et c , on suppose que $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Donc en considérant les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ et en utilisant module et argument de $\dfrac{z_C - z_O}{z_B - z_O} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, vu que $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ est écrit sous forme exponentielle (module : $\sqrt{2}$, argument : $\dfrac{\pi}{4}$)

on en déduit que : $\dfrac{|z_C - z_O|}{|z_B - z_O|} = \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC}) = \dfrac{\pi}{4}$

Donc $OC = \sqrt{2} \times OB$ et $(\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OC}) = \dfrac{\pi}{4}$

On peut donc tracer le dessin du triangle OBC, il suffit de choisir B (autre que O)



Le triangle OBC semble isocèle et rectangle en B, prouvons le en calculant $|0-b|$ et $|c-b|$ puis $\arg\dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B}$, donc on va calculer $\dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B}$ c'est

$\dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-b}{b\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - b}$; $\quad \dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} - 1}$;

$\dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-1}{(1+\mathrm{i}) - 1}$ car $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et que $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$

$\dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-1}{\mathrm{i}}$

$\dfrac{z_O - z_B}{z_C - z_B} = \mathrm{i}$ car $(-1) = (\mathrm{i})^2$ et

i est de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, donc $BO = BC$ et $\overrightarrow{BO} \perp \overrightarrow{BC}$.