

Nom Prénom :

Exercice 1 :

Inégalité de la moyenne :

- formule ;
 - illustration graphique ;
 - démonstration ;
 - application.
-

Exercice 2 :

Les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , de deux fonctions f et g définies sur $[0; +\infty[$.

On considère les points $A(0,5; 1)$ et $B(0; -1)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On sait que O appartient à \mathcal{C}_f et que la droite (OA) est tangente à \mathcal{C}_f au point O .

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = (ax + b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b , en détaillant la démarche.

Désormais, on considère que $f(x) = 2xe^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$

2. a. On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

3. La fonction g dont la courbe représentative \mathcal{C}_g passe par le point $B(0; -1)$ est une primitive de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

- a. Déterminer l'expression de $g(x)$.

- b. Soit m un réel strictement positif.

Calculer $I_m = \int_0^m f(t) dt$ en fonction de m .

- c. Déterminer $\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m$.

4. a. Justifier que f est une fonction densité de probabilité sur $[0; +\infty[$.

- b. Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité. Justifier que, pour tout réel x de $[0; +\infty[$,

$$P(X \leq x) = g(x) + 1.$$

- c. En déduire la valeur exacte du réel α tel que $P(X \leq \alpha) = 0,5$.

- d. Sans utiliser une valeur approchée de α , construire dans le repère de l'annexe 1 le point de coordonnées $(\alpha; 0)$ en laissant apparents les traits de construction.

Hachurer ensuite la région du plan correspondant à $P(X \leq \alpha)$.

ANNEXES (à compléter et à remettre avec la copie)

Annexe 1 (Exercice 2) :

