Proposition de corrigé

***Exercice* 1** :

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$.
Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.
L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

Partie A : non accessible pour le moment

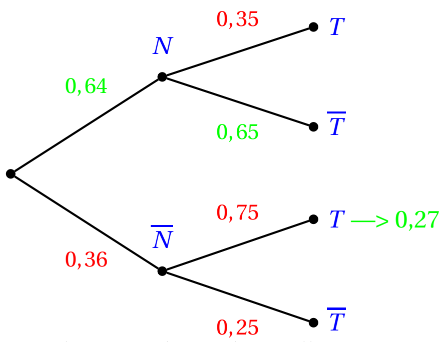
Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est $0,494$.

   On considère les événements :
   – N : « l'adhérent interrogé est un nouvel adhérent »
   – T : « l'adhérent interrogé possède un télescope »
   on peut alors illustrer la situation par un arbre pondéré :
   les données de l'exercice sont en vert et celles déduites sont en rouge



On cherche $P(T)$

N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}P(T) &= P(N \cap T) + P\left(\overline{N} \cap T\right)\\ &= P(N) \times P_N(T) + 0,27\\ &= 0,64 \times 0,35 + 0,27\\ &= 0,494\end{aligned}$$

2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

   On cherche $P_T(N)$

   $$P_T(N) = \frac{P(T \cap N)}{P(T)} = \frac{0,224}{0,494} \approx 0,453$$

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2 500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.
L' astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

On ne connaît pas la proportion p d'habitants du village qui sont favorables à la coupure mais on fait une hypothèse sur sa valeur. Pour valider cette hypothèse on utilise donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%
La taille de l'échantillon est $n = 100 \geqslant 25$ et la probabilité supposée p est bien comprise entre 0,2 et 0,8 ; on peut donc appliquer l'intervalle de fluctuation :
$I_n = \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit ici $I_n = [0,4 \,;\, 0,6]$
or la fréquence observée est $f = \dfrac{54}{100} = 0,54 \in I_n$
Le résultat conforte donc l'astronome.

remarque : on aurait pu raisonner autrement en utilisant un intervalle de confiance.

***Exercice* 2** :

Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout nombre réel x, $e^x \geqslant x+1$ (une relation de ce type sera utilisée pour démontrer que la fonction exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$)

1. Conjecturer ce résultat par une approche graphique (décrivez votre démarche et vos observations).
   $\mathscr{C}_g$, courbe représentative de la fonction exponentielle semble toujours être au dessus de $\mathscr{C}_f$, courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x+1$. Cela signifie que pour tout nombre x, on semble avoir $e^x \geqslant x+1$.
2. On introduit la fonction d définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 1$
   a. Étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$, en particulier le fait qu'elle atteint un minimum.
   $f(x) = e^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$. On est capable de donner le signe de cette expression (en sachant que la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, continue et qu'elle est égale à 1 en 0) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe $e^x - 1$		-		+	
variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

   La fonction admet donc un minimum en 0 ; ce minimum est égal à 0.
   b. Grâce à l'étude précédente, démontrer le résultat attendu.
   On a donc, pour tout nombre x, $f(x) = e^x - x - 1 \geqslant 0$, ce qui est équivalent à $e^x \geqslant x+1$