

Proposition de corrigé

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ce qui équivaut à $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; +\infty[$ et :

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x(-1 \times e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$; $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1} \approx 0,37$

D'où le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		+	-
$f(x)$	0	e^{-1}	0

On donne en **annexe** la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ , les points A_0 , A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 . Laisser les tracés explicatifs apparents.
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n > 0$.

- $u_0 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang $p \geq 0$, c'est-à-dire $u_p > 0$.
Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc pour tout réel $x > 0$, $xe^{-x} > 0$ donc $f(x) > 0$.
Or $u_{p+1} = f(u_p)$ et $u_p > 0$ (hypothèse de récurrence); donc $f(u_p) > 0$ et donc $u_{p+1} > 0$.
La propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vérifiée au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $p \geq 0$; elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned} -x < 0 &\iff e^{-x} < e^0 && \text{croissance de la fonction exponentielle} \\ &\iff e^{-x} < 1 \\ &\iff x e^{-x} < x && \text{car } x > 0 \\ &\iff f(x) < x \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) < x$; or, pour tout n , $u_n > 0$ donc $f(u_n) < u_n$ ce qui veut dire que $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

4. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

- b. Montrer que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x e^{-x} = x$.

$u_{n+1} = f(u_n)$; comme u_n est convergente vers un réel α , en « passant à la limite » dans cette égalité, du fait de la continuité de la fonction f , on a $\alpha = f(\alpha)$.

Ainsi, la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$ c'est-à-dire $x e^{-x} = x$.

Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

On résout l'équation $x e^{-x} = x$:

$$\begin{aligned} x e^{-x} = x &\iff x(e^{-x} - 1) = 0 &\iff x = 0 \text{ ou } e^{-x} - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1 &\iff x = 0 \text{ ou } -x = 0 \end{aligned}$$

Donc la limite de la suite (u_n) est égale à 0.

Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Compléter l'algorithme donné en **annexe** afin qu'il calcule S_{100} .

Exercice 2 :

On considère l'équation (E_1) :

$$e^x - x^n = 0$$

où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

$$\begin{aligned}
e^x - x^n = 0 &\iff e^x = x^n \\
&\iff \ln(e^x) = \ln(x^n) \\
&\iff x = n \ln(x) \\
&\iff \frac{x}{n} = \ln(x) \\
&\iff \ln(x) - \frac{x}{n} = 0
\end{aligned}$$

Donc les équations (E_1) et (E_2) sont équivalentes.

2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

L'équation (E_1) admet deux solutions si et seulement si l'équation (E_2) admet deux solutions.

Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - \frac{x}{n}$; résoudre l'équation (E_2) revient donc à résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Cherchons les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{n} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \end{array}$$

$f(x) = \ln(x) - \frac{x}{n}$ peut s'écrire $x \left(\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{n} \right)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} &= 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{n} \right) = -\infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

La fonction f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n} = \frac{n-x}{nx}$.

$f'(x)$ s'annule et change de signe pour $x = n$ et $f(n) = \ln(n) - \frac{n}{n} = \ln(n) - 1$.

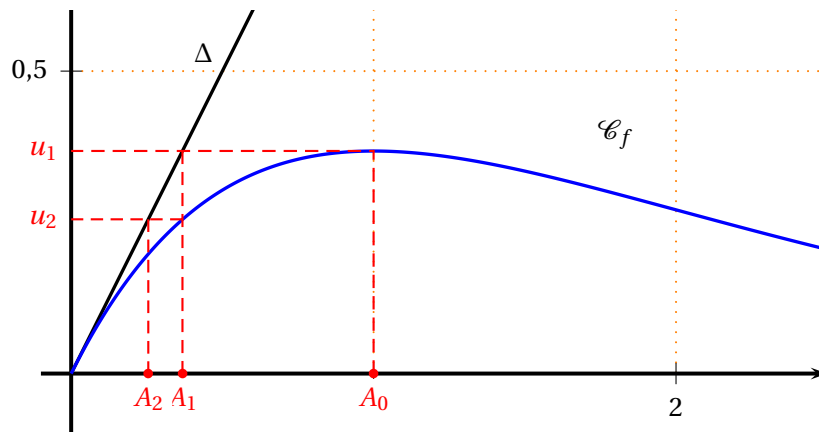
D'où le tableau de variation de la fonction f :

x	0	n	$+\infty$
$n-x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\ln(n) - 1$	$-\infty$

D'après ce tableau de variation, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $]0; +\infty[$ si et seulement si le maximum de la fonction f est strictement positif, c'est-à-dire quand $\ln(n) - 1 > 0$:

$$\ln(n) - 1 > 0 \iff \ln(n) > 1 \iff n > e \iff n \geq 3$$

Donc on peut dire que l'équation (E_1) admet deux solutions si et seulement si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.



Annexe de l'exercice 2 à rendre avec la copie

Partie B - Question 1

Partie C

Déclaration des variables : S et u sont des nombres réels
 k est un nombre entier

Initialisation : u prend la valeur 1
 S prend la valeur u

Traitement : Pour k variant de 1 à 100
 u prend la valeur $u \times e^{-u}$
 S prend la valeur $S + u$
 Fin Pour
 Afficher S