Proposition de corrigé

Le tableau [1] ci-dessous donne le montant des prix hors taxes et TTC du gaz naturel dans un certain nombre de pays européens.

Pays	**Prix HT (en c€/kWh)**	**Prix TTC (en c€/kWh)**
Suède	5,98	10,44
Danemark	5,10	10,42
Pays-Bas	5,2	8,65
Italie	4,94	7,42
Autriche	5,16	7,10
Allemagne	5,26	7,06
Slovénie	5,39	6,84
Irlande	5,93	6,74
Portugal	6,32	6,70
France	5,54	6,48
Espagne	5,55	6,44
Belgique	5,16	6,42
République Tchèque	4,62	5,50
Slovaquie	4,59	5,46
Luxembourg	4,77	5,44
Hongrie	4,37	5,33
Lettonie	4,80	5,28
Lituanie	3,98	4,74
Royaume-Uni	4,51	4,73
Pologne	3,84	4,69
Bulgarie	3,91	4,69
Estonie	3,44	4,24
Roumanie	1,91	3,13

1. Calculez à l'aide de votre calculatrice la moyenne et l'écart-type des deux séries.

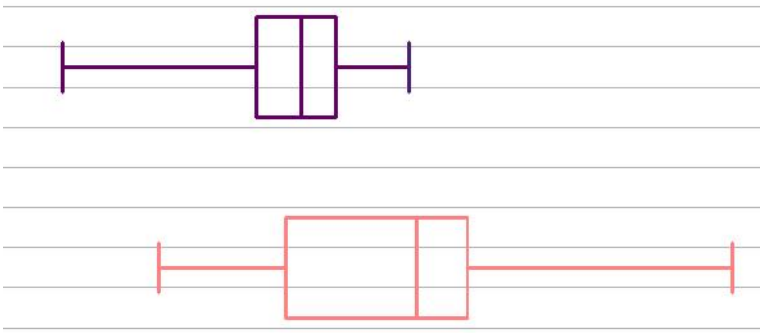
- pour la série des prix HT : $\bar{x} \approx 4,80$ et $\sigma \approx 0,94$
- pour la série des prix TTC : $\bar{x} \approx 6,26$ et $\sigma \approx 1,76$

2. Calculez pour chaque série, les premier et troisième quartiles ainsi que la médiane. Vous construirez les digrammes en boîtes correspondants (disposés l'un sous l'autre avec les mêmes échelles)

- pour la série des prix HT : $min = 1,91$; $Q_1 = 4,37$; $Me = 4,94$; $Q_3 = 5,39$; $max = 6,32$
- pour la série des prix TTC : $min = 3,13$; $Q_1 = 4,74$; $Me = 6,42$; $Q_3 = 7,06$; $max = 10,44$

1. source : SOeS d'après EuroStat ; enquête sur les prix de l'électricité et du gaz, *Chiffres et Statistiques*, n°141, juillet 2010

D'où les diagrammes en boîtes suivants :



3. Quelles remarques vous inspirent les résultats précédents quant à l'effet des taxes sur le prix de vente du gaz naturel ?

Le prix HT est en fait le prix du marché ; des pays peuvent négocier avec des pays producteurs de gaz naturel (le principal producteur de gaz naturel est la Russie, ce qui explique que des pays traditionnellement proches de la Russie ont souvent des prix HT intéressants).

Le prix TTC est un choix politique : un pays choisit de ne pas trop taxer ce type de produit, et de ce fait, réduit ses rentrées d'argent (pour résumer, ce sont des pays à tradition libérale, comme l'Irlande) ; un autre choix consiste à taxer fortement ce type de produit, ce qui permet d'avoir de grosses rentrées d'argent, mais entraîne un coup important pour les foyers. C'est la démarche de pays dits « Etat providence », comme les pays nordiques.

Ainsi, les prix HT sont relativement homogènes, car essentiellement dûs aux prix des marchés. Les prix TTC sont eux plus hétérogènes, car le reflet d'une politique fiscale propre à chaque pays.

Cette différence de répartition est caractérisée par des valeurs d'écart-type différentes. Elle est aussi visible sur le diagramme en boîte, où l'intervalle interquartile des prix TTC est plus grand que celui des prix HT.

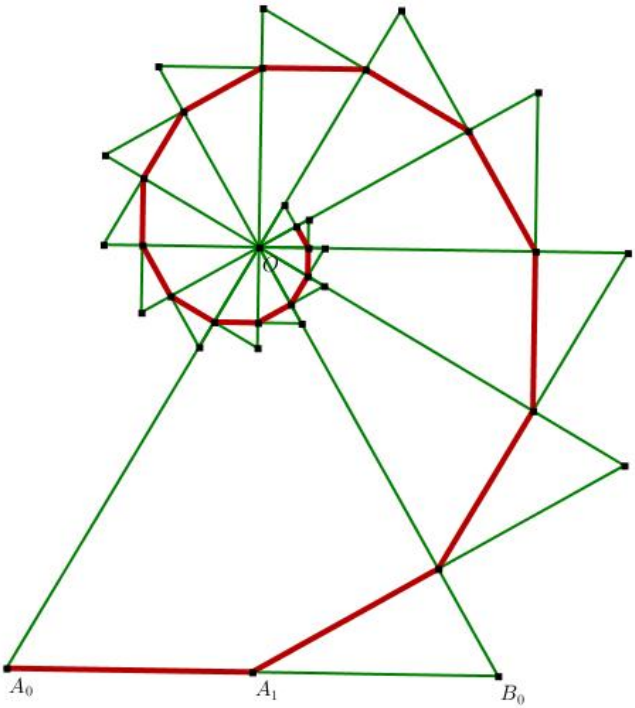
Problème nÂ°2 : une spirale **FACULTATIF**

On donne le programme de construction suivant :

1. on construit un triangle équilatéral OA_0B_0, de côté c ;
2. on place A_1 le milieu de $[A_0B_0]$;
3. on construit B_1 le symétrique de A_1 par rapport à (OB_0) ;
4. on note A_2 le milieu de $[A_1B_1]$;
5. on poursuit le processus (en remplaçant A_n par A_{n+1} et B_n par B_{n+1}).

On s'intéresse à la longueur de la spirale $A_0A_1A_2\ldots A_n$ et on étudiera ce qui se passe lorsque n tend vers l'infini.

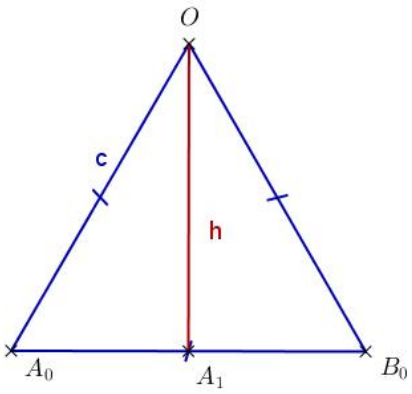
Tous les résultats que vous énoncerez devront être démontrés.



Si vous le souhaitez, vous pouvez présenter un algorithme permettant d'approcher la valeur de la longueur de cette spirale.

Après une phase de recherche, il apparaÃ®t que plusieurs résultats sont à démontrer :
– l'expression d'une hauteur dans un triangle équilatéral ;
– le fait que tous les triangles qu'on construit sont équilatéraux ;
– la longueur de la spirale est la somme d'une suite géométrique.

On va présenter ces résultats à la suite :
Hauteur d'un triangle équilatéral



Il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OA_0A_1 (rectangle en A_1 parce qu'il s'agit d'une hauteur) ; cela donne :

$OA_0^2 = OA_1^2 + A_0A_1^2$ soit : $c^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$ et donc : $h^2 = c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}c^2$

Ainsi, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

Tous les triangles construits sont équilatéraux

Nous allons démontrer par récurrence sur n, que le triangle OA_nB_n est équilatéral.

Initialisation : Le triangle OA_0B_0 est équilatéral ; la propriété est vraie au rang $n = 0$

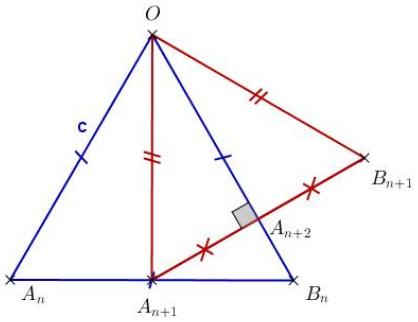
Hérédité : soit $n \geqslant 0$ fixé ; on suppose que le triangle OA_nB_n est équilatéral.

On veut montrer que le triangle $OA_{n+1}B_{n+1}$ l'est aussi.

A_{n+1} et B_{n+1} étant symétriques par rapport à la droite (OB_n), le triangle $OA_{n+1}B_{n+1}$ est isocèle en O, ce qui donne : $OA_{n+1} = OB_{n+1}$.

Au passage, remarquons que ces deux longueurs sont égales à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}OA_n$ (démonstration du même type que pour le calcul de la hauteur vue précédemment).

On a donc pour le moment : $OA_{n+1} = OB_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}OA_n$.



Exprimons l'aire du triangle $OA_{n+1}B_n$ de deux manières différentes :

$$\mathscr{A}_{OA_{n+1}B_n} = \frac{1}{2}(OB_n \times A_{n+1}A_{n+2}) = \frac{1}{2}(OA_{n+1} \times A_{n+1}B_n)$$

Cela permet d'écrire : $\dfrac{A_{n+1}A_{n+2}}{A_{n+1}B_n} = \dfrac{OA_{n+1}}{OB_n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (cette dernière égalité est justifiée par le fait que le triangle OA_nB_n est équilatéral).

Cela donne : $A_{n+1}A_{n+2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A_{n+1}B_n$; en prenant le double de chaque quantité : $A_{n+1}B_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A_nB_n$, ce qui donne finalement :

$$A_{n+1}B_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}OA_n$$

Ainsi, $OA_{n+1} = OB_{n+1} = A_{n+1}B_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}OA_n$: le triangle $OA_{n+1}B_{n+1}$ est équilatéral ; l'hérédité est démontrée.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 0$, elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

la suite des longueurs des segments de la spirale est une suite géométrique

On note l_n la longueur du $n^{\text{ième}}$ segment de la spirale, avec $l_0 = \frac{c}{2}$.

En démontrant précédemment que $A_{n+1}A_{n+2} = \frac{\sqrt{3}}{2}A_{n+1}B_n = \frac{\sqrt{3}}{2}A_nA_{n+1}$, on a prouvé que :

$l_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}l_n$: il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On peut exprimer sa somme : $S_n = \frac{c}{2}\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Si on fait tendre n vers $+\infty$, comme $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, on obtient (en notant S cette valeur limite) :

$$S = \frac{c}{2}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{2} \times \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times 2 = c\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = (2+\sqrt{3})c$$

Ainsi, en additionnant « un nombre infini » de segments, on obtient pourtant une longueur finie

$$S = (2+\sqrt{3})c$$

Algorithme

On peut proposer un algorithme approchant la valeur de la spirale (ce serait utile par exemple si on ne connaÃ®t pas la formule sur la somme d'une suite géométrique, ou si on ne connaÃ®t pas la notion de limite d'une suite).

On peut proposer l'algorithme suivant pour calculer $\frac{c}{2} + \frac{c}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{c}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \ldots + \frac{c}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$:

Entrée (ou paramètre) :	n un entier naturel. c un nombre réel
Variables :	i entier naturel. v un réel.
Traitement :	Affecter à v la valeur $\frac{c}{2}$. Pour i variant de 1 à n | Affecter à v la valeur $v + \frac{c}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^i$ Fin de Pour
Sortie (ou résultat) :	v

Le problème est qu'on ne maîtrise pas la précision du processus : on ajoute des quantités de plus en plus petites mais on en ajoute une infinité ; quelle est donc la quantité qui manque à la valeur « exacte » quand on a additionné n termes ; si on ne connaÃ®t pas la valeur exacte, on n'en sait rien ! Et donc, cet algorithme n'est pas totalement satisfaisant dans la mesure où on ne contrÃ´le pas la précision du résultat donné.