Cours de Mathématiques de 6ème

Classes de Mme Craighero et Mme Boucher

Année scolaire 2018-2019

Table des matières

Chapitre 1

Connaître et représenter les nombres

I Connaître les nombres entiers

Il y a une **infinité** de nombres entiers.
Chaque nombre entier a un suivant. Deux nombres entiers qui se suivent sont **deux nombres entiers consécutifs**.

Le tableau suivant est à connaître par coeur :

classe des MILLIARDS			classe des MILLIONS			classe des MILLE			classe des UNITES		
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u
								4	2	1	5
		1	5	4	6	4	9	8	7	3	4
								1	2	0	0

Dans ce tableau :
– « c » signifie « centaines » ;
– « d » signifie « dizaines » ;
– « u » signifie « unités ».

Pour lire ou écrire un nombre entier, on sépare son écriture **en tranche de trois chiffres à partir de la droite**.

Par exemple, 78 503 722 680 se lit « soixante-dix-huit **milliards** cinq-cent-trois **millions** sept-cent vingt-deux **mille** six-cent quatre-vingts ».

II Connaître les nombres décimaux

II - 1) Plus petit que l'unité

Lorsque l'on coupe une unité en dix parties égales, on obtient des **dixièmes**.
Il faut dix dixièmes pour faire une unité.

En coupant un dixième en dix parties égales, on obtient des **centièmes**.
Il faut dix centièmes pour faire un dixième et il faut cent centièmes pour faire une unité.

Les **dixièmes** : $\frac{1}{10} = 0,1$ $\quad \frac{2}{10} = 0,2$ $\quad \frac{42}{10} = 4,2$ $\quad \frac{160}{10} = 16$

les **centièmes** : $\frac{1}{100} = 0,01$ $\quad \frac{2}{100} = 0,02$ $\quad \frac{15}{100} = 0,15$ $\quad \frac{1\,284}{100} = 12,84$

> Les nombres décimaux sont la **somme** d'une **partie entière** (un nombre entier) et d'une **partie décimale** (un nombre plus petit que l'unité).

Pour écrire plus simplement 5 unités **et** 4 dixièmes **et** 3 centièmes, on écrit : 5,43

On peut écrire les **décompositions** suivantes :

$$\begin{aligned} 42{,}578 &= 42 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1\,000} \\ &= 42 + 0{,}5 + 0{,}07 + 0{,}008 \\ &= 42 + 0{,}578 \\ &= 42 + \frac{578}{1\,000} \end{aligned}$$

42,578 se lit donc :
4 dizaines, 2 unités, 5 dixièmes,
7 centièmes et 8 millièmes

ou 42 unités et 578 millièmes

II - 2) Définition, écriture et lecture d'un nombre décimal

3,1 27 54,35 4 14,8 0,037

Tous ces nombres sont des nombres **décimaux**.

Plusieurs écritures pour un même nombre :

$$0014{,}5070 = 14{,}50700 = 14{,}507000 = 14{,}507$$

L'**écriture réduite** du nombre est 14,507.

Les nombres décimaux sont les nombres dont l'écriture réduite **a un nombre fini de chiffres après la virgule**.

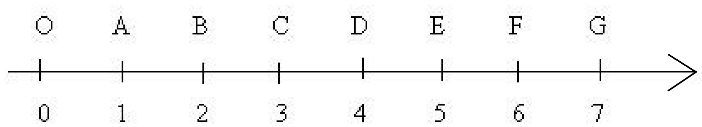
classe des MILLIARDS			classe des MILLIONS			classe des MILLE			classe des UNITES			DIXIEME	CENTIEME	MILLIEME	DIX-MILLIEME
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u				
									4	2	9	6	1	3	
								4	2	1	5				

lecture de 429,613 : ce nombre se lit « quatre cent vingt-neuf et six cent treize millièmes »
- 2 est le chiffre des dizaines ;
- 1 est le chiffre des centièmes ;
- 429 est la **partie entière** ;
- 613 millièmes (= 0,613) est la **partie décimale**.

Les **nombres entiers font partie des nombres décimaux** : leur partie décimale est **nulle** (c'est-à-dire égale à zéro).

III Représenter les nombres sur une droite graduée

Sur une droite graduée, on repère chaque point par un nombre appelé **abscisse** de ce point.



L'abscisse du point D est 4.

Notation : cela se note $\boxed{D(4)}$

IV Comparer, encadrer des nombres décimaux

IV - 1) Comparer deux nombres

Vocabulaire :

comparer deux nombres, c'est dire s'ils sont égaux ou non ; s'ils sont différents, on précise lequel est le plus grand

ordre **croissant** : du plus petit au plus grand.

ordre **décroissant** : du plus grand au plus petit.

$<$ se lit : « plus petit que »ou « inférieur à »

$>$ se lit : « plus grand que »ou « supérieur à »

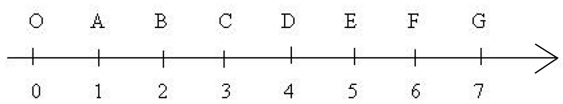
Pour comparer deux nombres :

1. on compare d'abord les parties entières :

   exemples : 25,02 $>$ 24,02 7,89 $<$ 12 412,99 $<$ 421,01 12,2 $>$ 1,86666

2. si les deux parties entières sont égales, on compare successivement les chiffres placés après la virgule :

   exemples : 25,02 $<$ 25,1 463,561 $<$ 463,6 62,2 $>$ 62,0256



Remarque : il est facile de comparer des nombres à l'aide de la droite graduée : si un point A est placé à gauche d'un point B, l'abscisse de A est inférieure à l'abscisse de B.

IV - 2) Encadrer un nombre

Écrire un encadrement d'un nombre, c'est trouver un nombre plus petit et un nombre plus grand que ce nombre.

exemple : 12,5 $<$ 13,125 $<$ 152

On peut vouloir un encadrement :

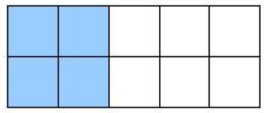
– **à l'unité** ; cela revient à encadrer le nombre par deux entiers consécutifs :
13$<$ 13,125 $<$ 14 ; 425$<$ 425,001 $<$ 426

– **au dixième** ; cela revient à encadrer le nombre par deux décimaux dont la différence est égale à un dixième :
102,7$<$ 102,72 $<$ 102,8 ; 15,1$<$ 15,19996 $<$ 15,2

V Connaître et représenter des fractions

V - 1) Fraction partage

Une fraction peut servir à nommer **un partage à parts égales**.



La partie coloriée représente les $\frac{4}{10}$ ou les $\frac{2}{5}$ du rectangle.

V - 2) Fractions égales

Un quotient ne change pas si on multiplie ou on divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul.

exemples :

$\frac{11}{3} = \frac{11 \times 3}{3 \times 3} = \frac{33}{9}$ $\qquad$ $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 7}{3 \times 7} = \frac{7}{21}$ $\qquad$ $\frac{30}{48} = \frac{30 \div 6}{48 \div 6} = \frac{5}{8}$

V - 3) Fraction quotient

Le quotient de a par b (avec b non nul) se note $\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b} \text{ signifie } a \div b$$

* a est le **numérateur**,

* b est le **dénominateur**.

exemple :

Dans l'égalité $3 \times ? = 5$ le nombre manquant est $\frac{5}{3}$

$\frac{5}{3}$ signifie $5 \div 3$, mais cette division ne se « termine »pas :

* le quotient de 5 par 3 n'est pas un nombre décimal ;
* on doit donc noter sa **valeur exacte** $\frac{5}{3}$;
* 1,67 est une **valeur approchée** au centième de $\frac{5}{3}$.

Chapitre 2

Calculer avec des nombres entiers, des nombres décimaux et des fractions

I Vocabulaire

Une somme est le résultat de **l'addition** de deux ou plusieurs **termes**.

Calculer la somme de 11,6 et 6 : $11,6 + 6 = 17,6$.

Une différence est le résultat de **la soustraction** de deux **termes**.

Calculer la différence entre 18,2 et 14,23 : $18,2 - 14,23 = 3,97$

Un produit est le résultat de **la multiplication** de deux ou plusieurs **facteurs**.

Calculer le produit de 35 par 21 : $35 \times 21 = 735$

II La multiplication

II - 1) multiplier par 10, par 100, par 1000 . . . et par 0,1, 0,001, 0,001 . . .

Multiplier un nombre **par 10** revient à décaler la virgule de **1 rang vers la droite** en ajoutant 1 zéro si nécessaire.

exemples : $15 \times 10 = 150$ $3,85 \times 10 = 38,5$ $0,5 \times 10 = 5$

Multiplier un nombre **par 1000** revient à décaler la virgule de **3 rangs vers la droite** en ajoutant 1, 2 ou 3 zéros si nécessaire.

exemples : $15 \times 1000 = 15000$ $3,85 \times 1000 = 3850$ $0,0005 \times 1000 = 0,5$

Multiplier un nombre **par 0,01** revient à décaler la virgule de **2 rangs vers la gauche** en ajoutant des zéros et une virgule si nécessaire.

exemples : $15 \times 0,01 = 0,15$ $3,85 \times 0,01 = 0,0385$ $5\ 000 \times 0,01 = 50$

II - 2) Placer la virgule dans un produit

On compte le nombre de décimales dans chaque facteur.

On ajoute ces valeurs.

On place la virgule dans le résultat.

III Propriétés des opérations

III - 1) L'ordre dans les opérations

Dans le calcul d'une somme, l'ordre des termes n'a pas d'importance.

exemple : $6 + 58 + 4 \quad = \quad 6 + 4 + 58 \quad = \quad 10 + 58 \quad = \quad 68$

L'ordre dans lequel on écrit les termes d'une soustraction est très important.

exemple : 214 - 143 existe mais on ne sait pas faire 143 - 214 en classe de 6^{eme}.

Dans le calcul d'un produit, l'ordre des facteurs n'a pas d'importance.

On regroupe les facteurs pour avoir les calculs les plus simples possibles.

exemple : $2 \times 42 \times 5 \quad = \quad 2 \times 5 \times 42 \quad = \quad 10 \times 42 \quad = \quad 420$

III - 2) Priorités opératoires

a) Sans parenthèses

Dans un calcul sans parenthèses, la multiplication s'effectue en premier.

On dit que la multiplication est **prioritaire** par rapport à l'addition et la soustraction.

exemples :

$7 + \underline{3 \times 2} = 7 + 6 = 13$

$25 - \underline{2 \times 3} = 25 - 6 = 19$

remarque : il en est de même pour la **division** ; par exemple : $25 - \underline{14 \div 7} = 25 - 2 = 23$

b) Avec parenthèses

Dans un calcul avec parenthèses, c'est le calcul entre parenthèses qui s'effectue en premier.

Les parenthèses définissent le calcul **prioritaire**.

exemples :

$\underline{(7 + 3)} \times 2 = 10 \times 2 = 20$

$\underline{(25 - 2)} \times 3 = 23 \times 3 = 69$

IV Divisions

IV - 1) Division euclidienne

La division euclidienne, c'est la division qu'on effectue à l'école primaire.

Vocabulaire : quand on a terminé la division euclidienne, il y a **un reste** (qui peut être égal à 0).

Dans une division euclidienne, on n'utilise que des nombres entiers.

$$\begin{array}{l|c} \text{Dividende} & \underline{\text{diviseur}} \\ & \text{quotient} \\ \text{reste} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & \underline{\ 4\ } \\ 1 & 2 & & 130 \\ & 0 & 1 & \\ & & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & \underline{\ 3\ } \\ 0 & 1 & 8 & 46 \\ & & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{D = q \times d + r} \qquad 521 = 4 \times 130 + 1 \qquad 138 = 3 \times 46$$

$$138 \div 3 = 46$$

IV - 2) Multiple, diviseur

Si le reste de la division euclidienne du nombre a par le nombre b est égal à 0, alors a « est dans la table » de b, on dit que :

- a est un **multiple** de b,
- ou a est **divisible** par b,
- ou b est un **diviseur** de a,
- ou encore b **divise** a.

exemple : $45 = 5 \times 9$
Cela montre que : 45 est un multiple de 5 et aussi que 45 est un multiple de 9.

IV - 3) Critères de divisibilité

Comment savoir rapidement si un nombre est multiple de 2, de 3, de 5, de 9, de 10 ?

Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par : 0, 2, 4, 6, 8.

Un nombre entier est un multiple de 5 s'il se termine par 0 ou par 5.

Un nombre entier est divisible par 10 s'il se termine par 0.

Un nombre entier est un multiple de 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

exemples :
* 123 : $1 + 2 + 3 = 6$; 6 est un multiple de 3 donc 123 est un multiple de 3.
* 416 : $4 + 1 + 6 = 11$; 11 n'est pas un multiple de 3 donc 416 n'est pas divisible par 3.

Un nombre entier est un multiple de 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

exemples :
* 123 : $1 + 2 + 3 = 6$; 6 n'est pas un multiple de 9 donc 123 n'est pas un multiple de 9.
* 486 : $4 + 8 + 6 = 18$; 18 est un multiple de 9 donc 486 est divisible par 9.

Un nombre entier est un multiple de 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est un multiple de 4.

idée : pour savoir si un nombre est un multiple de 4, on peut prendre deux fois de suite la moitié du nombre.

exemples :
* 454 : la moitié de 54 est 27 ; la moitié de 27 n'est pas un nombre entier : 454 n'est pas un multiple de 4.
* 1 472 : la moitié de 72 est 36 ; la moitié de 36 est un nombre entier : 1 472 est un multiple de 4.

IV - 4) Quotient tronqué et arrondi

Lorsque la division ne se termine pas, le quotient obtenu n'est pas un nombre décimal.

Un nombre est **décimal** lorsqu'il y a un **nombre fini** de chiffres après la virgule.

$\begin{array}{lllll\|l} 5 & 2 & 1 & & & \underline{\ 4\ } \\ 1 & 2 & & & & 130{,}25 \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & 2 & 0 & \\ & & & & 0 & \end{array}$	$\begin{array}{lllll\|l} 1 & 0 & 0 & & & \underline{\ 3\ } \\ & 1 & 0 & & & 33{,}33... \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1... & \end{array}$	$\begin{array}{lllll\|l} 2 & 5 & 5 & & & \underline{\ 11\ } \\ & 3 & 5 & & & 23{,}18... \\ & & 2 & 0 & & \\ & & & 9 & 0 & \\ & & & & 2... & \end{array}$
$521 \div 4 = 130,25$	$100 \div 3 = 33,333333...$	$255 \div 11 = 23,181818...$
nombre décimal	**valeur approchée**	**valeur approchée**
(valeur exacte)	* au dixième : 33,3	* au dixième : 23,2
	* au centième : 33,33	* au centième : 23,18
	* au millième : 33,333	* au millième : 23,182

remarque importante :

> Diviser par : 10 ; 100 ; 1000 revient à déplacer la virgule de : 1 ; 2 ; 3 rangs vers la gauche.
>
> Cela revient à multiplier par : 0,1 ; 0,01 ; 0,001.

exemples :
$26 \div 10 = 2,6$ $\quad 26 \times 0,1 = 2,6$ $\quad 41,6 \times 0,01 = 0,416$ $\quad 41,6 \div 100 = 0,416$

V Traduire un problème en langage mathématique

V - 1) Un exemple courant : calculer un prix en fonction de la masse

J'achète des fraises à 4,50 € le kilo. :

Pour calculer le prix à payer je multiplie la masse (en kg) par le prix au kilo. :

* Si j'en achète 2 kg : $2 \times 4,50 = 9$ Je paie 9 €.

* Si j'en achète 800 g : $0,8 \times 4,50 = 3,60$ Je paie 3,60 €.

* Si j'en achète 3,2 kg : $3,2 \times 4,50 = 14,40$ Je paie 14,40 €.

V - 2) Prendre la fraction d'un nombre

Prendre une fraction d'un nombre, c'est multiplier cette fraction par ce nombre.

exemple : prendre les $\frac{2}{5}$ de 50
c'est multiplier $\frac{2}{5}$ par 50, ce qui donne : $\frac{2}{5} \times 50$.

Méthode : il y a plusieurs manières d'effectuer ce calcul. On doit se rappeler de la règle suivante :

On a le droit d'allonger le trait de fraction, et de le faire glisser :

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b} = a \times \frac{c}{b}$$

exemple : on peut effectuer $\frac{2}{5} \times 50$ de trois manières différentes

$$\frac{2}{5} \times 50 = 0,4 \times 50 = 20$$

$$\frac{2}{5} \times 50 = \frac{2 \times 50}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

$$\frac{2}{5} \times 50 = 2 \times \frac{50}{5} = 10 \times 2 = 20$$

Chapitre 3

Quelques grandeurs géométriques et leurs unités

I Durée

L'unité de durée est la seconde, notée s.

Autres unités de durée :

* la minute (notée mn ou min) : $\mathbf{1}\ mn = \mathbf{60}\ s$

* l'heure (notée h) : $\mathbf{1}\ h = \mathbf{60}\ mn = \mathbf{3600}\ s$

* le jour : 1 jour $\approx 24\ h$

On donne parfois les durées dans plusieurs unités : ex : 1 h 27 min 48 s

Attention, ce ne sont pas alors des nombres décimaux : 1 h 30 min = 1,5 h

II Masse

L'unité de masse est le gramme, noté g.

Le tableau suivant est à connaître par coeur :

t *(tonne)*	q *(quintal)*		kg *(kilo)*	hg *(hecto)*	dag *(déca)*	g	dg *(déci)*	cg *(centi)*	mg *(milli)*	
						1	0	0	0	1 g = 1000 mg
			1	0	0	0				1 kg = 1000 g
						0	3	0		30 cg = 0,3 g
2	4	0	0							24 q = 2 400 kg

III Longueur

III - 1) Unité de longueur

L'unité de longueur est le mètre, noté m.

Le tableau suivant est à connaître par coeur :

km *(kilo)*	hm *(hecto)*	dam *(déca)*	m	dm *(déci)*	cm *(centi)*	mm *(milli)*
			1	0	0	
				3	0	0
			0	7	0	
	4	6	1	2	3	

1 m = 100 cm

30 cm = 300 mm

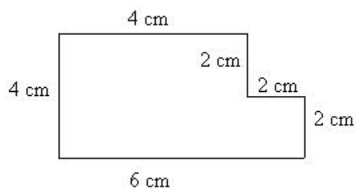
70 cm = 0,7 m

461,23 m = 4612,3 dm

III - 2) Périmètre

Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour.

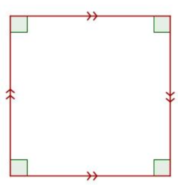
Pour calculer le périmètre d'un polygone, on ajoute les longueurs de ses côtés.



le périmètre de cette figure se calcule en faisant :

$$4 + 2 + 2 + 2 + 6 + 4 = 20 \text{ cm}.$$

III - 3) Périmètre du carré et du rectangle



carré de côté c

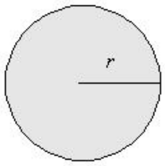
$$c + c + c + c = 4 \times c$$

rectangle de longueur L et de largeur l

$$L + l + L + l = 2 \times (L + l)$$

III - 4) Périmètre du cercle

Pour calculer le périmètre d'un cercle, il faut connaître **par coeur** une formule (on ne peut pas l'inventer !).



Formule du périmètre d'un cercle (on dit aussi circonférence du cercle) :

si le cercle a pour rayon r, alors le périmètre se calcule par la formule :

$$\boxed{\mathcal{P} = 2 \times \pi \times r}$$

où π est un nombre qui vaut environ 3,14

exemples : circonférence d'un cercle de rayon 10 cm : $2 \times \pi \times 10 \approx 2 \times 3,14 \times 10 \approx 62,8$ cm.

La Terre : circonférence d'un cercle de rayon 6 378 km : $2 \times \pi \times 6\,378 \approx 40\,074$ km

$2 \times 3 \times 6\,378 \approx 38\,268$ km ← l'erreur est d'environ 1 800 km

$2 \times 3,14 \times 6\,378 \approx 40\,054$ km ← l'erreur est d'environ 20 km

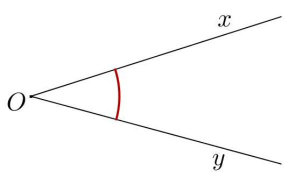
$2 \times 3,141 \times 6\,378 \approx 40\,067$ km ← l'erreur est d'environ 7 km

$2 \times 3,14159 \times 6\,378 \approx 40\,074$ km ← l'erreur est de moins d'un km

IV Angle

IV - 1) Définition

Un angle est un morceau de plan limité par deux demi-droites de même origine.

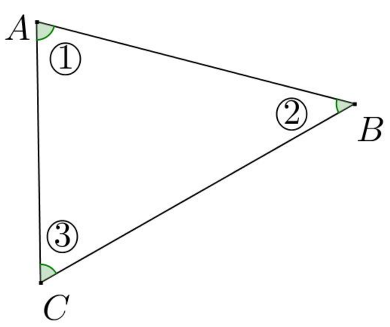


* **O est le sommet de l'angle.**

* **$[Ox)$ et $[Oy)$ sont les côtés de l'angle.**

* **On note cet angle $\widehat{xOy}$ ou $\widehat{yOx}$.**
  La lettre du milieu désigne toujours le sommet.

exemples :



* l'angle ① de sommet A se note :

  $\widehat{BAC}$ ou $\widehat{CAB}$

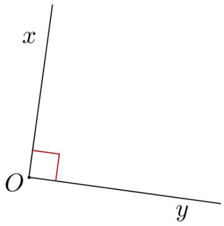
* l'angle ② de sommet B se note :

  $\widehat{CBA}$ ou $\widehat{ABC}$

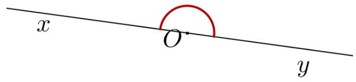
* l'angle ③ de sommet C se note :

  $\widehat{BCA}$ ou $\widehat{ACB}$

IV - 2) Angles particuliers



angle **droit**



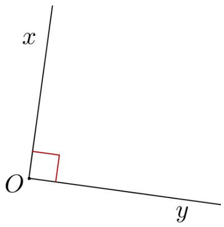
angle **plat**

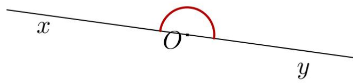
IV - 3) Angles et mesures

Pour mesurer un angle, on utilise un **rapporteur** : c'est un demi-cercle gradué de 0 à 180 degrés.

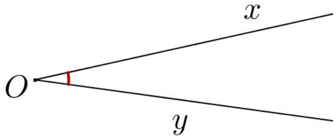
L'angle **droit** mesure **90°**.

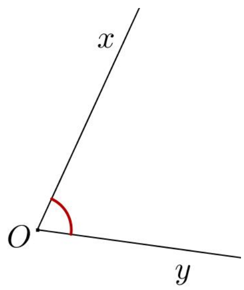
L'angle **plat** mesure **180°**.



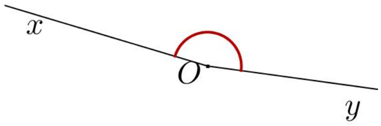


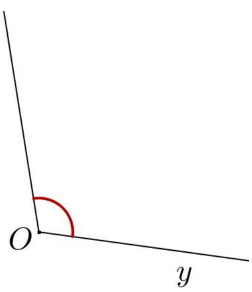
Un angle **aigu** mesure **entre 0° et 90°**.





Un angle **obtus** mesure **entre 90° et 180°**.





remarque : **avant de mesurer un angle**, il faut être capable de donner l'ordre de grandeur de sa mesure ; **on repère déjà s'il est aigu ou obtus**.

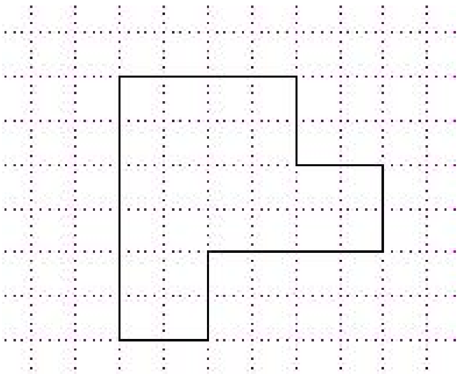
V Aire d’une surface

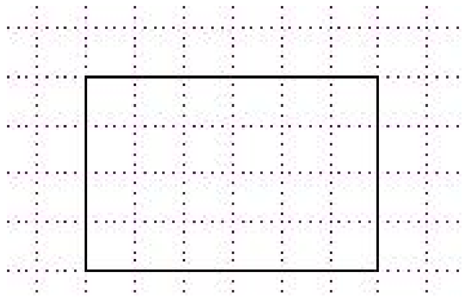
« Je vois mon reflet à la **surface** de l’eau. »

« Je calcule l’**aire** du sol de ma chambre. »

V - 1) Définition

L’aire d’une surface est sa mesure dans une unité d’aire donnée :





Ces deux figures ont pour aire : 24 carreaux.

V - 2) Unité d’aire

L’unité d’aire est le mètre carré, noté m^2 : c’est l’aire d’un carré de 1 m de côté.

Le tableau suivant est à connaître par coeur :

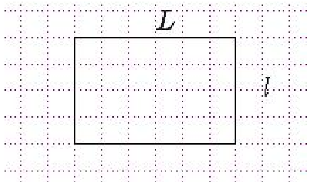
km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
											1	0	0
								1	6	3	4	2	
5	6	3	2	8	4								
					5	3	9	5	1				

Grâce au tableau précédent, on peut dire que :

- 1 cm^2 = 100 mm^2
- 16,342 dm^2 = 1634,2 cm^2 = 163 420 mm^2
- 56,3284 km^2 = 5 632,84 hm^2 = 563 284 dam^2 = 56 328 400 m^2
- 5,3951 dam^2 = 539,51 m^2 = 5 395 100 cm^2

V - 3) Aires de figures usuelles

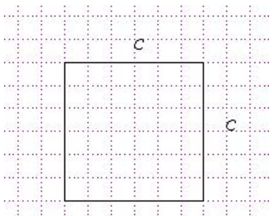
a) Aire d'un rectangle



$\mathcal{A} = L \times l$

exemple : L'aire d'un rectangle de 6 cm de longueur et 4 cm de largeur : $\mathcal{A} = L \times l = 6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$

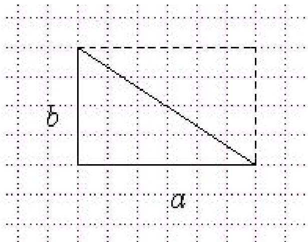
b) Aire d'un carré



$\mathcal{A} = c \times c$

exemple : L'aire d'un carré de 6 cm de côté : $\mathcal{A} = c \times c = 6 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$

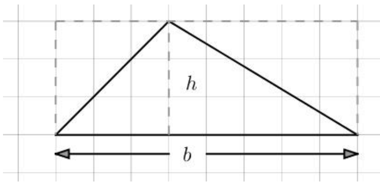
c) Aire d'un triangle rectangle



$$\mathcal{A} = \frac{a \times b}{2}$$

exemple : L'aire d'un triangle rectangle de 6 cm de base et 4 cm de hauteur : $\mathcal{A} = \dfrac{a \times b}{2} = \dfrac{6 \times 4}{2} = \dfrac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2$

d) Aire d'un triangle quelconque

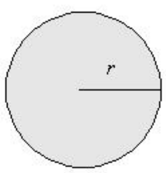


$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$$

exemple : L'aire d'un triangle de 8 cm de base et 3 cm de hauteur : $\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{8 \times 3}{2} = \dfrac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2$

e) Aire d'un disque

Pour calculer l'aire d'un disque, il faut connaître **par coeur** une formule (on ne peut pas l'inventer !).



Formule de l'aire d'un disque :

si le disque a pour rayon r, alors l'aire se calcule par la formule :

$$\boxed{\mathcal{A} = \pi \times r \times r}$$

où π est un nombre qui vaut environ 3,14

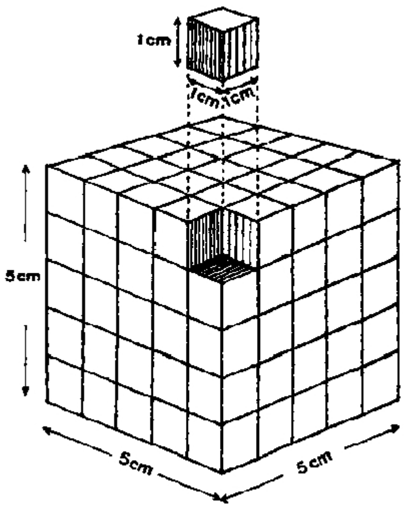
exemple : aire d'un disque de rayon 10 cm : $\pi \times 10 \times 10 = 100\,\pi \approx 314 \text{ cm}^2$.

VI Volume d'un solide

VI - 1) Volume du cube

L'unité de volume est le mètre cube, noté m^3 : c'est le volume d'un cube de 1 m d'arête.

définition : le volume d'un cube (exprimé en cm^3),
c'est le nombre de cubes de 1 cm d'arête que l'on peut mettre à l'intérieur.



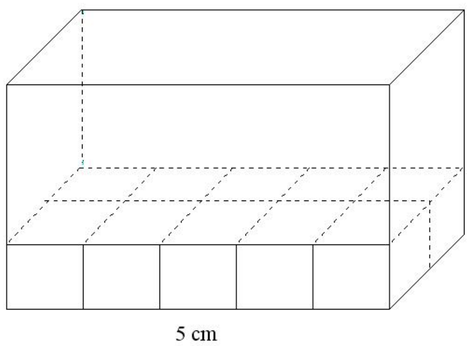
Dans la figure ci-contre, il y a : $5 \times 5 \times 5$ petits cubes.
or : $5 \times 5 \times 5 = 25 \times 5 = 125$ et donc ce cube a un volume de 125 cm^3.

Formule du volume d'un cube dont l'arête est égale à a :

$$\mathcal{V} = a \times a \times a$$

si a est en cm, $\mathcal{V}$ est en cm^3

VI - 2) Volume du pavé



Dans la figure ci-contre, il y a : $5 \times 2 = 10$ petits cubes au premier niveau.

Il y a 3 niveaux, donc au total :
$10 \times 3 = 30$ petits cubes.

On aurait pu faire directement :
$5 \times 2 \times 3 = 10 \times 3 = 30$ pour trouver le résultat.

Ce pavé a un volume de 30 cm^3.

Formule du volume d'un pavé qui mesure a par b par c :

$$\mathcal{V} = a \times b \times c$$

*** a, b et c doivent avoir la même unité de longueur,**

*** si a, b et c sont exprimés en m, $\mathcal{V}$ est en m^3**

VI - 3) Conversion de volumes

On peut utiliser un tableau de conversion des volumes pour passer d'une unité à une autre :

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
												1	6	3	4	2				
5	6	3	2	8	4															
						5	3	9	5	1	8	9								
																	2	8	4	5

Grâce à ce tableau, on peut dire que :

- 163,42 dm^3 = 163 420 cm^3 = 0,16342 m^3
- 563,284 km ^{3} = 563 284 hm^3 = 563 284 000 dm^3
- 2,845 cm^3 = 2845 mm^3 = 0,002845 dm^3

VI - 4) Volume et contenance

Un volume se mesure en « *quelque chose* »^{3} (exemple : m^3, cm^3, etc.).

Par exemple, le volume d'une bouteille de lait est de 1dm^3

Une contenance se mesure en Litres (L)

Par exemple, la contenance d'une canette de coca est de 33 cl

A retenir : 1 dm^3 = 1 L

exemple : 2,845 cm^3 = 0,002845 dm^3 = 0,002845 L = 2,845 mL

Cet exemple montre au passage que $\boxed{1\ \text{cm}^3 = 1\ \text{mL}}$

Chapitre 4

Connaître et représenter quelques figures géométriques et solides

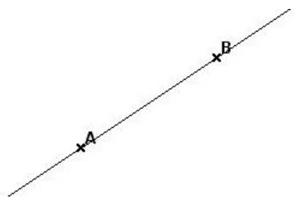
I Dans le plan

I - 1) Avec une règle non graduée

a) Le point

Le point A.

b) La droite

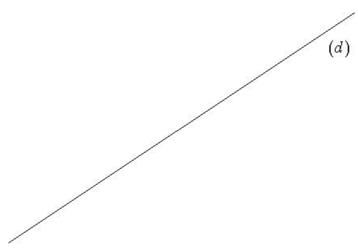


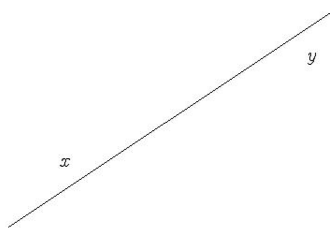
La droite passe par A et B sans s'arrêter ; elle est formée d'une **infinité** de points.

(AB) **est la droite qui passe par** A **et** B**.**

remarque : une droite peut aussi se noter (d) ou (xy).

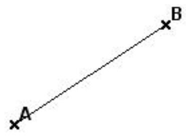
Attention : x, y, d ne sont pas des points.





c) Le segment

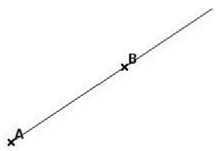
Le segment est une portion de droite limitée par deux points appelés « extrémités ».



Le segment qui a pour extrémités A et B est noté : $[AB]$.

d) La demi-droite

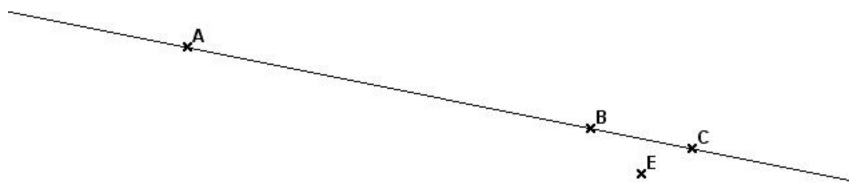
La demi-droite est une portion de droite limitée par un point appelé origine.



La demi-droite qui a pour origine A et qui passe par B est notée : $[AB)$.

I - 2) Points et droite

a) Points alignés

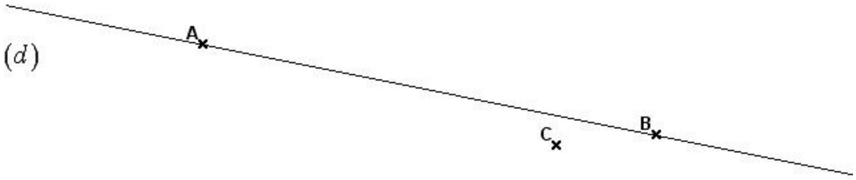


Des points sont alignés s'ils appartiennent à la même droite.

exemples :
* Les points A, B, C sont alignés.
* Les points A, B, E ne sont pas alignés.

remarques :
* Deux points sont toujours alignés.
* La droite présentée ci-dessus peut se nommer : (AB), (BC), (AC) ...

b) « appartenir à »



* Le point A appartient à la droite (d).

On écrit : $A \in (d)$.
On lit : « A appartient à (d) ».

On a aussi : $B \in (d)$; $A \in (AB)$; $B \in (d)$.

* Le point C n'appartient pas à la droite (d).

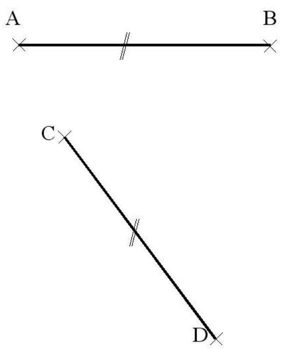
On écrit : $C \notin (d)$.
On lit : « C n' appartient pas à (d) ».

On a aussi : $C \notin (AB)$.

I - 3) Le segment

a) Longueur d'un segment

La longueur du segment [AB] est notée : AB.



AB = 4 cm

CD = 4 cm

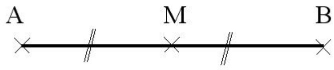
On peut reporter une longueur avec le compas :

les deux segments [AB] et [CD] ont la même longueur : AB = CD.

Pour indiquer que des longueurs sont égales, on met **un codage** : $//$; $/$; $\times$; o ... sur les segments qui ont la même longueur.

b) Le milieu d'un segment

Le milieu d'un segment est le point de ce segment situé à la même distance de ses extrémités.

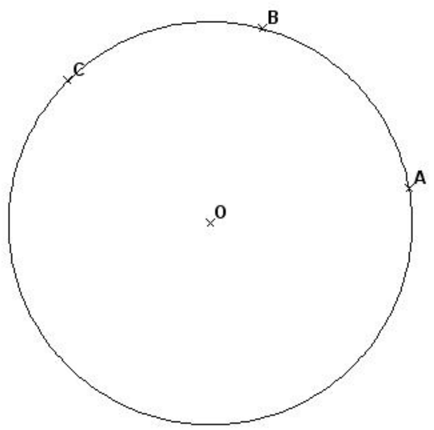


M milieu de $[AB]$ signifie : $M \in [AB]$ et $AM = MB$

I - 4) Le cercle

a) Définition

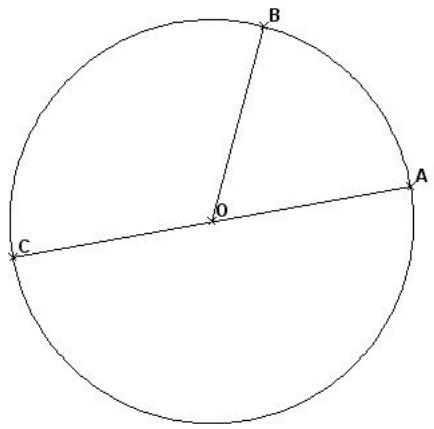
Le cercle est un ensemble de points situés **à la même distance** d'un point appelé **centre**.



Les points A, B, C sont sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

On a :
* $A \in \mathcal{C}$,
* $B \in \mathcal{C}$,
* $C \in \mathcal{C}$,
* $O \notin \mathcal{C}$.

b) Vocabulaire



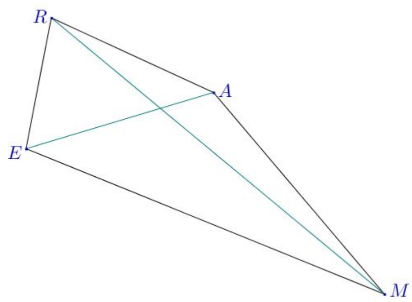
* $\mathcal{C}$ est le **cercle** de **centre** O.
* $[OB]$ est un **rayon**.
* $[AC]$ est un **diamètre**.
* $[AB]$ est une **corde**.

remarque : le mot « rayon » désigne à la fois tous les segments qui joignent le centre du cercle à un point du cercle, et la longueur de ces segments.

I - 5) Polygones, triangles, quadrilatères

a) Polygones

Un polygone est une figure fermée dont les côtés sont des segments.



* R, A, M et E sont **les sommets** du polygone.

* [AM] et [ME] sont **des cotés consécutifs**.

* [RE] et [AM] sont **des côtés opposés**.

* [RM] et [AE] sont **les diagonales** de ce polygone.

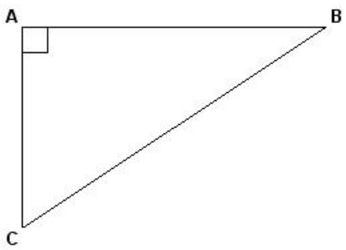
Attention : le polygone ci-dessus peut se nommer, par exemple, RAME ou AMER (en lisant les lettres dans un ordre, en faisant le tour du quadrilatère).
On ne doit pas le nommer ARME.

b) Triangles

Un triangle est un polygone à trois côtés.

cas particuliers :

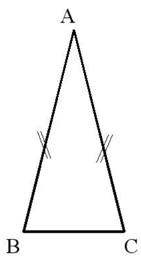
Un **triangle rectangle** a un angle droit.



ABC est rectangle **en** A.

On a : $[AB] \perp [AC]$

Un triangle **isocèle** a deux côtés de même longueur.



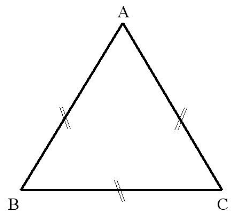
ABC est isocèle **en** A.

On a : $AC = AB$

ici, A est le **sommet principal** ; $[BC]$ est la **base** de ce triangle isocèle.

Remarque : un triangle peut être à la fois rectangle et isocèle.

Un triangle **équilatéral** a ses trois côtés de même longueur.



ABC est équilatéral.

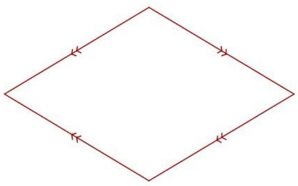
On a : $AB = AC = BC$

c) Quadrilatères

Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés.

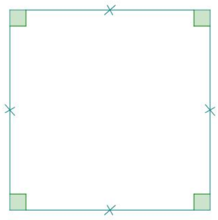
cas particuliers :

Un **losange** est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur.

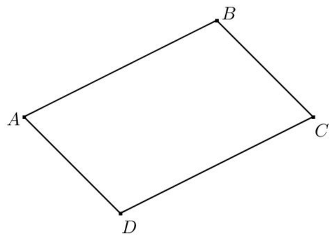


Un **rectangle** est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Un **carré** est à la fois un losange et un rectangle : il a quatre côtés de même longueur **et** quatre angles droits



Un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles



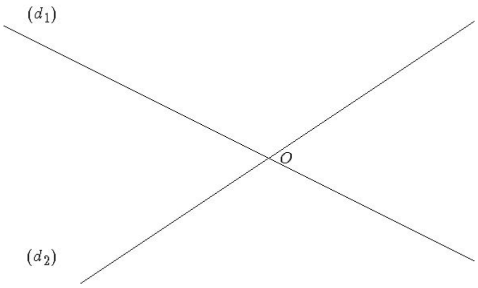
remarques :
- on peut obtenir un **parallélogramme** en superposant deux bandes de papier à bords parallèles ;
- le **parallélogramme** possède de nombreuses propriétés (les côtés opposés ont même longueur, les diagonales se coupent en leur milieu, et bien d'autres) qui seront étudiées plus tard au collège ;
- le losange, le rectangle et bien sûr le carré sont des **parallélogrammes particuliers**.

I - 6) Droites sécantes

a) Définition

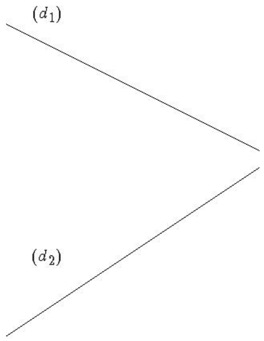
Deux droites sont sécantes si elles ont un point commun appelé « point d'intersection ».

exemples :



(d_1) et (d_2) sont sécantes en O

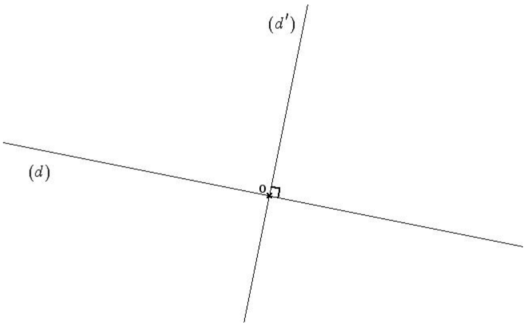
O est le point d'intersection



(d_1) et (d_2) sont sécantes.

b) Cas particulier

Deux droites sont perpendiculaires si elles sont sécantes en formant un angle droit.



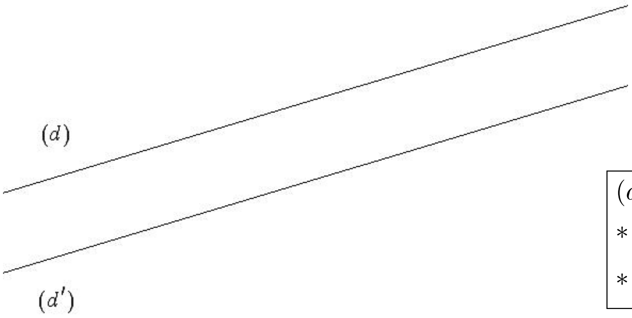
(d) et (d') sont perpendiculaires en O.

* **On écrit :** $(d) \perp (d')$.

* **On lit : «** (d) **et** (d') **sont perpendiculaires ».**

I - 7) Droites parallèles

Deux droites sont parallèles si elles ne sont pas sécantes : elles n'ont aucun point commun.



(d) et (d') n'ont aucun point commun : elles sont parallèles.

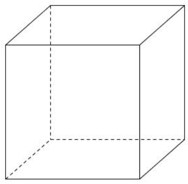
* **On écrit :** $(d) \,//\, (d')$.

* **On lit : «** (d) **et** (d') **sont parallèles ».**

II Dans l'espace

II - 1) Le cube

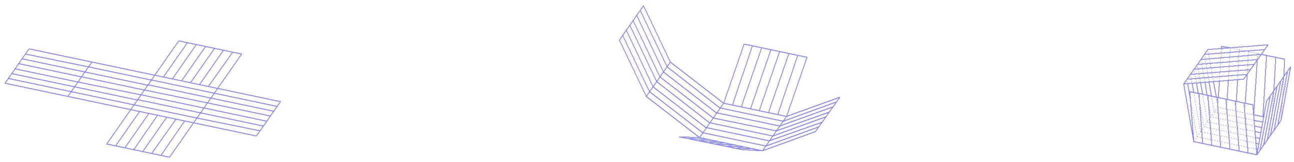
a) Vue en perspective



vue en **perspective** d'un cube

Description : un cube est composé de :
- 6 **faces**, chaque face étant un carré.
- 8 **sommets**.
- 12 **arêtes** qui relient les sommets.

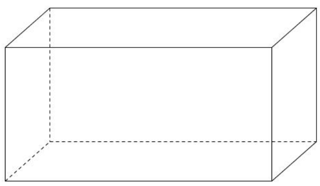
b) Patron(s) du cube



- Le patron est composé de carrés.
- Il existe plusieurs patrons possibles.

II - 2) Le parallélépipède rectangle (le pavé)

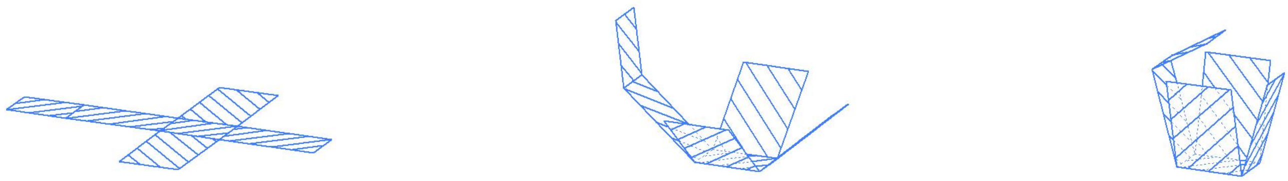
a) Vue en perspective



vue en **perspective** d'un pavé

Description : un pavé est composé de :
- 6 **faces**, chaque face étant un rectangle : les faces opposées sont identiques.
- 8 **sommets**.
- 12 **arêtes** qui relient les sommets.

b) Patron(s) du pavé

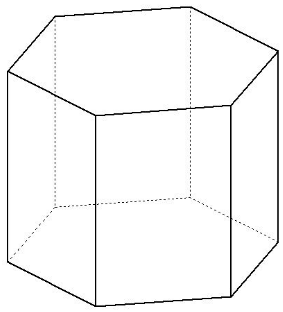


- Le patron est composé de rectangles.
- Les faces opposées sont identiques : il faut savoir les repérer sur le patron.
- Il existe plusieurs patrons possibles.

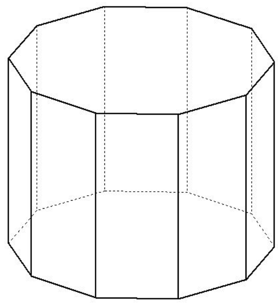
II - 3) Le prisme droit

Un **prisme droit** est un solide tel que :

– les bases sont deux polygones superposables, parallèles ;
– les faces latérales sont des rectangles.



prisme dont la base est un hexagone



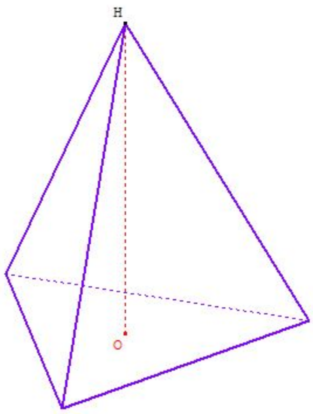
prisme dont la base est un décagone

remarque : le cube et le pavé droit sont des prismes.

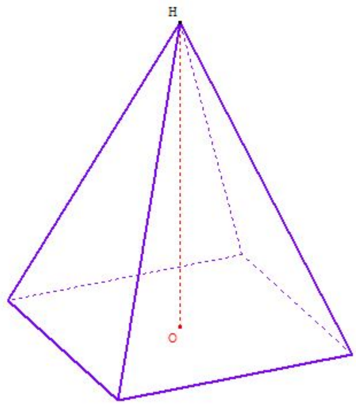
II - 4) La pyramide (régulière)

Une **pyramide** est un solide tel que :

– la base est un polygone ;
– les faces latérales sont des triangles ayant un sommet commun.



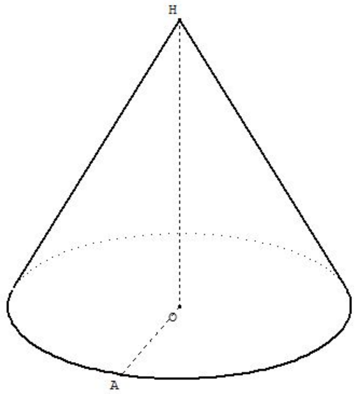
pyramide régulière à base triangulaire
on la nomme aussi « tétraèdre »



pyramide régulière à base carrée

remarque : sur ces deux figures, OS est la hauteur de la pyramide. (OS) est « perpendiculaire » à la base.

II - 5) Le cône



Deux dimensions définissent un **cône** :

- le **rayon** du disque de base ;
- la **hauteur**.

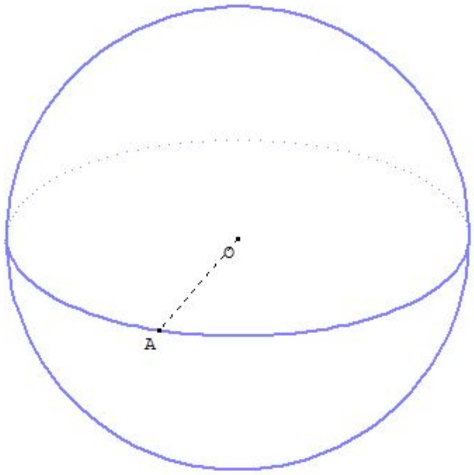
Sur la figure ci-contre, le rayon est la longueur OA et la hauteur est la longueur OH

II - 6) La boule

Une seule dimension définit une **boule** :

- son **rayon**

Sur la figure ci-contre, le rayon est la longueur OA



Chapitre 5

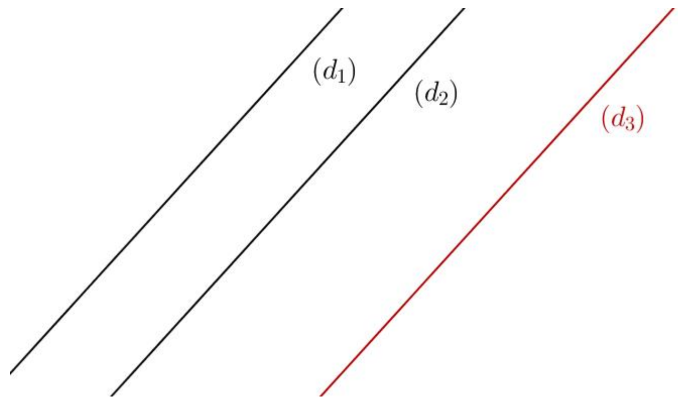
Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques

I Parallélisme et perpendicularité

I - 1) Propriétés

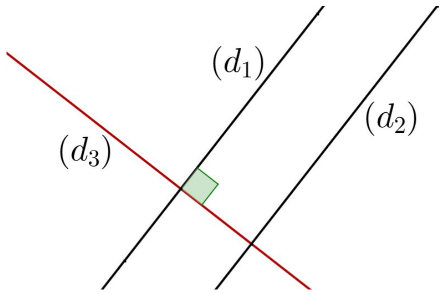
a) Première propriété

Si on sait que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles à la droite (d_3),
alors on peut conclure que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles entre elles.



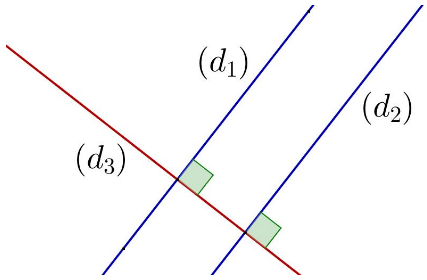
b) Deuxième propriété

Si on a deux droites (d_1) et (d_2) parallèles entre elles.
Si on sait qu'une droite (d_3) est perpendiculaire à la droite (d_1),
alors on peut conclure que la droite (d_3) est aussi perpendiculaire à la droite (d_2)



c) Troisième propriété

Si on sait que les droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires à la droite (d_3),
alors on peut conclure que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles entre elles.



II Médiatrice d'un segment

II - 1) Première définition

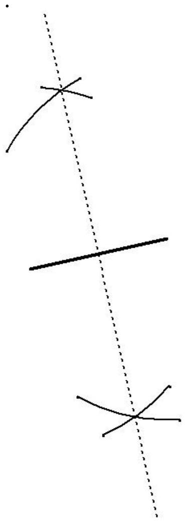
définition : la médiatrice du segment [AB] est l'ensemble des points équidistants à A et B.

Autre formulation : $AM = MB$ revient à dire que le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

II - 2) Seconde définition

La médiatrice d'un segment est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement en son milieu.

Construction :



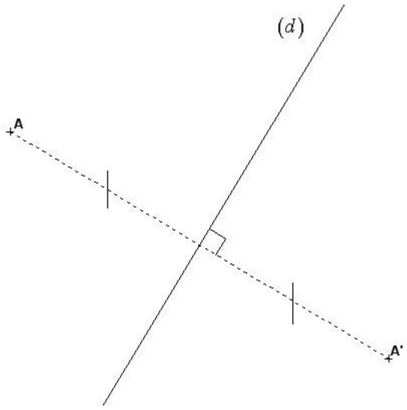
programme de construction :

1. prendre le compas, choisir une ouverture (quelconque mais plus grande que la moitié du segment),
2. tracer deux arcs de cercle (un de chaque « côté » du segment) à partir de l'une des extrémités du segments,
3. recommencer depuis l'autre extrémité du segment,
4. relier les deux points formés par les arcs de cercle.

III Symétrie

III - 1) Symétrique d'un point

a) Symétrique d'un point et médiatrice



Construire le symétrique du point A par rapport à la droite (d).

On remarque :
* $(d) \perp [AA']$;

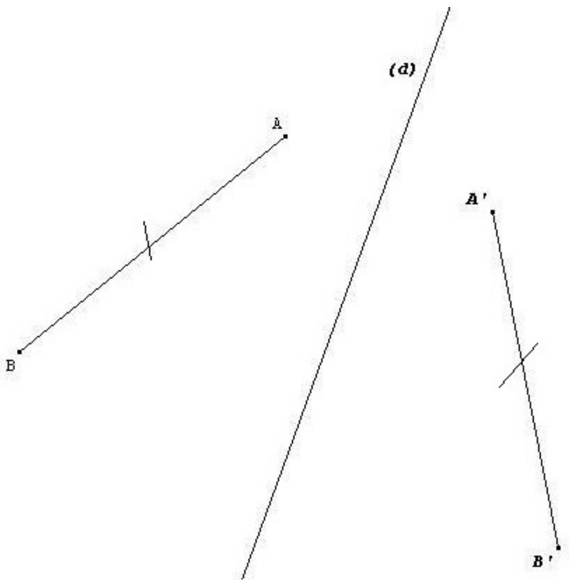
* (d) passe au milieu de $[AA']$.

Donc, (d) est la médiatrice de $[AA']$.

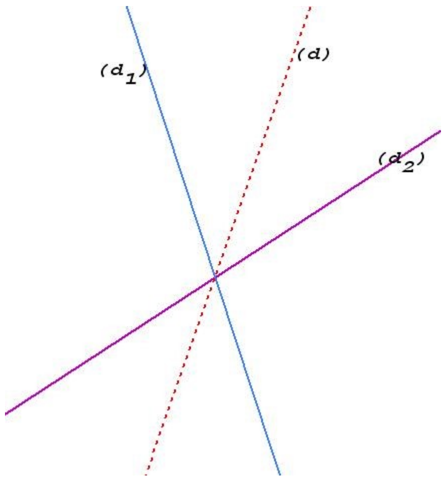
b) Définition

Deux points A et A' sont symétriques par rapport à une droite (d) si (d) est la médiatrice de $[AA']$.

III - 2) Symétrique d'un segment, d'une droite

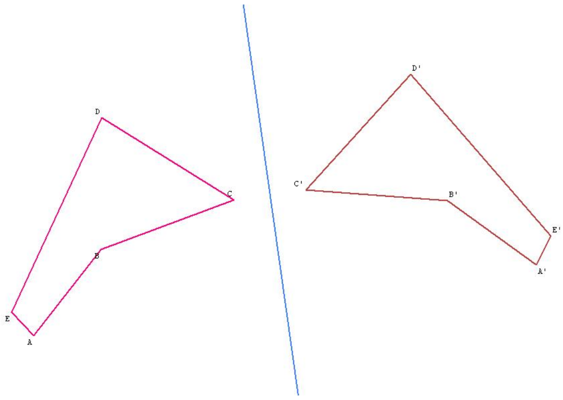


Le symétrique d'un segment est un segment de même longueur.

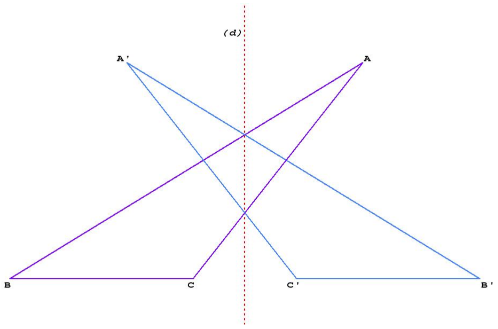


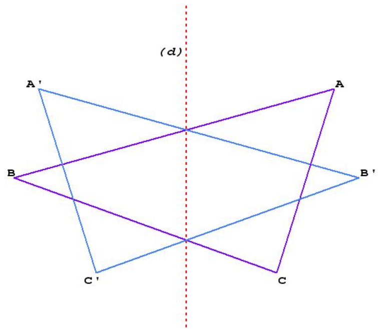
Le symétrique d'une droite est une droite.

III - 3) Symétrique d'une figure

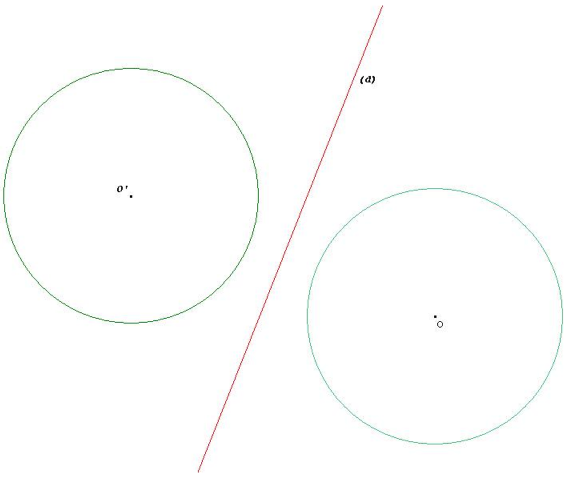


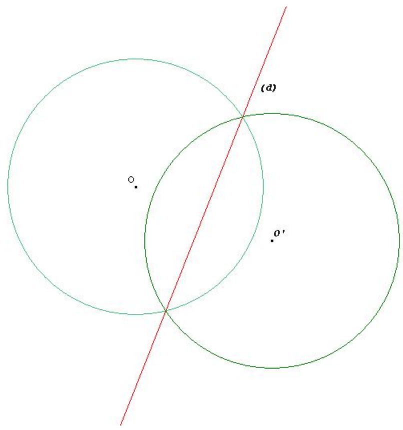
Deux figures symétriques sont **superposables** ; en conséquence, elles ont :
- des côtés de même longueur ;
- des angles de même mesure ;
- des aires égales.





III - 4) Symétrique d'un cercle



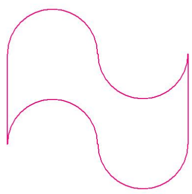


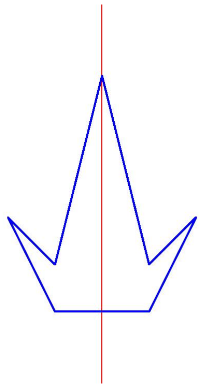
Le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon.
Les deux centres sont symétriques.

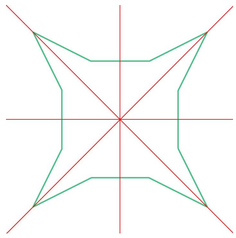
III - 5)   Figure admettant un ou plusieurs axes de symétrie

Si le symétrique d'une figure par rapport à une droite est la figure elle-même, on dit que cette droite est un axe de symétrie de cette figure.

exemples :

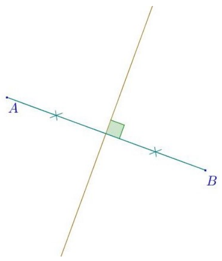




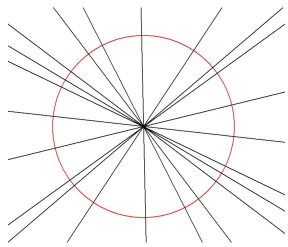


pas d'axe de symétrie   un axe de symétrie   quatre axes de symétrie

Deux exemples importants :



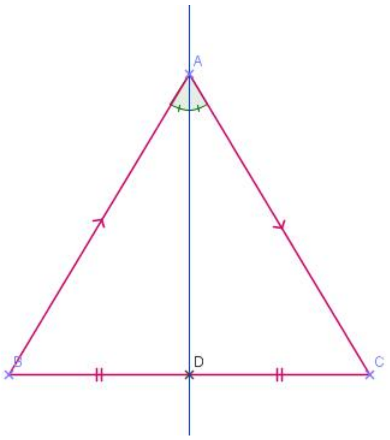
La médiatrice d'un segment est un axe de symétrie du segment.



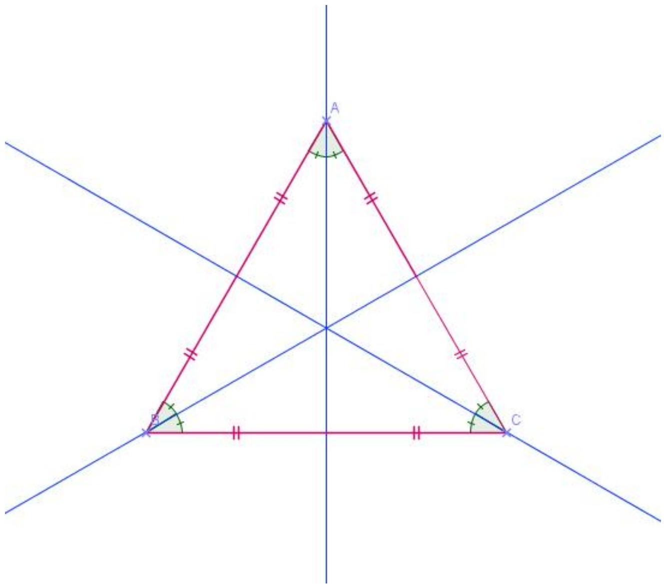
Le cercle a une infinité d'axes de symétrie.

III - 6) Polygones et axes de symétrie

a) Triangles

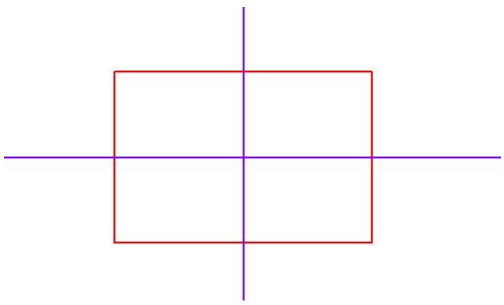


Le triangle isocèle possède un axe de symétrie *qui est à la fois la médiatrice de la base et la bissectrice de l'angle au sommet*.

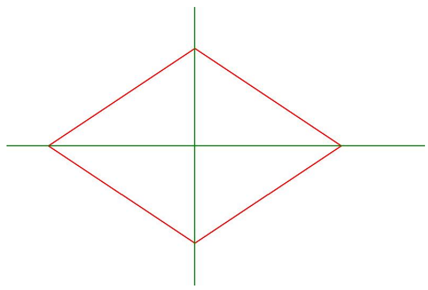


Le triangle équilatéral a trois axes de symétrie *qui sont à la fois les médiatrices des côtés et les bissectrices des angles*.

b) Quadrilatère

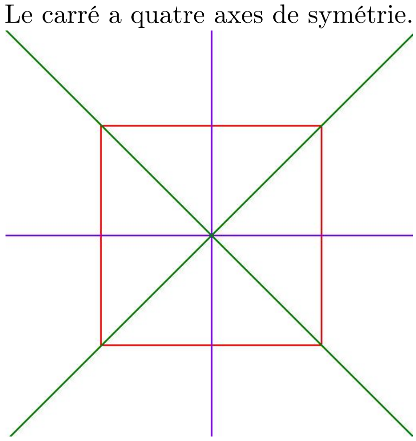


Le rectangle a deux axes de symétrie : les médiatrices de ses côtés.



Le losange a deux axes de symétrie : ses diagonales.

Le carré a quatre axes de symétrie.



Chapitre 6

Proportionnalité *(thème transversal)*

I Grandeurs proportionnelles

> **définition** :
> deux grandeurs sont proportionnelles si l'on peut calculer les valeurs de l'une en multipliant (ou divisant) les valeurs de l'autre par **un nombre, toujours le même**.

exemples :
* le **prix** payé et le **nombre** de baguettes achetées sont (en général) proportionnels.

* le **prix** payé et la **masse** de pommes achetées sont (en général) proportionnels.

* l'**âge** et la **taille** d'une personne ne sont pas proportionnels.

II Tableau de proportionnalité

On achète des pommes : on paie 3 € pour 2 kg.
On peut construire le tableau suivant, le prix étant proportionnel à la masse :

masse en kg	2	1	5	10	12
prix en €	3	1,5	7,5	15	18

Dans ce tableau, les valeurs de la $2^{\text{ème}}$ ligne sont calculées en **multipliant** ceux de la $1^{\text{ère}}$ ligne par un même nombre : 1,5 dans cet exemple.

Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

III Échelle

> Lorsque les longueurs sur un plan sont proportionnelles aux longueurs réelles, on dit que **le plan est à l'échelle**.

exemple : Jean fait le plan de sa chambre à l'échelle : 1 cm de son plan représente 200 cm en réalité.

remarque importante : on dit que c'est un plan à $\boxed{\text{l'échelle } \frac{1}{200}}$.

On peut utiliser un tableau de proportionnalité pour passer des longueurs réelles à celles du plan :

longueur sur le plan (en cm)	1	2	12	0,3
longueur réelle (en cm)	200	400	2400	60

– pour passer de la première à la deuxième ligne : on multiplie par 200.

– pour passer de la deuxième à la première ligne : on divise par 200.