Chapitre 4

Fonction exponentielle

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
propriétés numériques de la fonction exponentielle						
propriétés de la fonction exponentielle						
calculs de limites avec la fonction exponentielle						
étude de fonctions définies à partir de la fonction exponentielle						
résolution d'équations utilisant la fonction exponentielle						

1) La fonction exponentielle

1 - 1) Un rappel sur la dérivation

Théorème :

> f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, a et b deux nombres ($a \neq 0$).
>
> Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
>
> Sa dérivée g' est définie par $g'(x) = af'(ax+b)$

Exemple :

$g(x) = (2x+3)^5$ peut être vu comme $f(2x+3)$, avec $f(X) = X^5$; on a alors $f'(X) = 5X^4$

D'après le théorème précédent, $g'(x) = 2f'(2x+3) = 2 \times 5(2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$

Démonstration :

Pour tout nombre $h \neq 0$, notons $\tau(h)$ le taux d'accroissement de g entre x et $x+h$:

$$\tau(h) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{f(a(x+h)+b) - f(ax+b)}{h}$$

Posons $ax+b = X$ et $ah = H$; alors, $\tau(h) = a \times \dfrac{f(X+H) - f(X)}{H}$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} H = 0$ et $\lim\limits_{H \to 0} \dfrac{f(X+H) - f(X)}{H} = f'(H)$, par dérivabilité de la fonction f.

D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(ax+b+ah) - f(ax+b)}{ah} = f'(ax+b)$$

Il en résulte que $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = a \times f'(ax+b)$. Ainsi, g est dérivable en x.

Ce résultat étant vrai pour tout nombre x de $\mathbb{R}$, g est dérivable et $g'(x) = af'(ax+b)$

Commentaire :

Ce résultat sera nécessaire dans la démonstration (exigible) du théorème présenté au paragraphe suivant, théorème fondamental permettant de définir la fonction exponentielle.

1 - 2) Fonction exponentielle à partir d'une relation entre dérivée et fonction

Théorème :

> Il existe une **unique fonction** f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que,
>
> pour tout nombre x, $f'(x) = f(x)$, et $f(0) = 1$

Démonstration - BAC :

L'existence d'une telle fonction est admise. Démontrons son **unicité**.

On montre tout d'abord que cette fonction ne s'annule jamais :

Soit $\Phi(x)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = f(x) \times f(-x)$.
Produit de deux fonctions dérivables, Φ est dérivable et pour tout nombre x :

$\Phi'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)[(-1) \times f'(-x)] = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$

On a supposé que pour tout nombre x, $f'(x) = f(x)$, ce qui entraîne aussi $f'(-x) = f(-x)$

La relation précédente devient : $\Phi'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$

La fonction Φ est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$; or, $\Phi(0) = f(0) \times f(0) = 1$

Ainsi, pour tout nombre x, $f(x)f(-x) = 1$, ce qui entraîne d'une part, que pour tout nombre x, $f(x) \neq 0$ et d'autre part, que $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

Démonstration de l'unicité de la fonction f :

Supposons qu'il existe g, dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $g' = g$ et $g(0) = 1$.

On considère alors la fonction $\Psi(x) = g(x) \times f(-x)$

Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\Psi'(x) = g'(x)f(-x) - g(x)f'(-x) = g(x)f(-x) - g(x)f(-x) = 0$:
Ψ est constante sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, $\Psi(0) = 1$; ainsi, pour tout nombre x, $g(x) \times f(-x) = 1$

On a montré précédemment que pour tout nombre x, $f(x)f(-x) = 1$; on a alors : $g(x)f(-x) = f(x)f(-x)$ pour tout nombre x.

Comme f ne s'annule pas, on peut simplifier l'égalité précédente par $f(-x)$, ce qui donne, pour tout nombre x : $g(x) = f(x)$, ce qui signifie que la fonction g est en fait la fonction f.

Conclusion : la fonction f est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Définition :

> La fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée **fonction exponentielle**.
>
> On la note **exp**.

COMMENTAIRES :

* La fonction exponentielle $exp : x \mapsto exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$(exp)' = exp \qquad \text{et} \qquad exp(0) = 1$$

* Pour tout nombre x, $exp(x) \neq 0$ et $exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}$

2) Propriétés de la fonction exponentielle

2 - 1) Relation fonctionnelle

Propriété :

> Pour tous nombres a et b, $\boxed{exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)}$

DÉMONSTRATION :

Soit b un nombre quelconque. Le nombre $exp(b)$ est non nul.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{exp(x+b)}{exp(b)}$

Si on veut prouver l'égalité voulue, il faudra montrer que g est la fonction exponentielle ; pour ce faire, il faut montrer que sa dérivée est elle même, et qu'elle vaut 1 en 0.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme composée de fonctions dérivables) et, pour tout nombre x :
$g'(x) = \dfrac{exp'(x+b)}{exp(b)} = \dfrac{exp(x+b)}{exp(b)} = g(x)$

Par ailleurs, $g(0) = \dfrac{exp'(0+b)}{exp(b)} = 1$

g est bien la fonction exponentielle ; pour tout nombre x, $g(x) = \dfrac{exp(x+b)}{exp(b)} = exp(x)$, ce qui donne $exp(x+b) = exp(b) \times exp(x)$

On obtient l'expression voulue pour $x = a$.

COMMENTAIRE :

Avec l'égalité $exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$, on peut avoir comme image le fait que la fonction exponentielle « **transforme** » **une somme en un produit**.

2 - 2) Corollaire de la relation fonctionnelle

Propriétés pour la fonction :

(1) La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, c'est-à-dire que pour tout réel a, $exp(a) > 0$

(2) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATIONS :

(1) $exp(a) = exp(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}) = exp(\frac{a}{2}) \times exp(\frac{a}{2}) = \left(exp(\frac{a}{2})\right)^2$
Or, $exp(\frac{a}{2}) \neq 0$, donc $\left(exp(\frac{a}{2})\right)^2 > 0$, ce qui prouve le résultat annoncé.

(2) comme $exp'(x) = exp(x) > 0$, la fonction exp est strictement croissante.

Propriétés numériques :

Pour tous nombres a et b, et l'entier n,

(1) $\boxed{exp(2a) = (exp(a))^2}$ (2) $\boxed{exp(-a) = \dfrac{1}{exp(a)}}$

(3) $\boxed{exp(a-b) = \dfrac{exp(a)}{exp(b)}}$ (4) $\boxed{exp(na) = (exp(a))^n}$

DÉMONSTRATIONS :

(1) $exp(2a) = exp(a+a) = exp(a) \times exp(a) = (exp(a))^2$

(2) $exp(-a) \times exp(a) = exp(-a+a) = exp(0) = 1$. De plus, la fonction exponentielle ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, $exp(-a) = \dfrac{1}{exp(a)}$

(3) $exp(a-b) = exp(a) \times exp(-b) = exp(a) \times \dfrac{1}{exp(b)} = \dfrac{exp(a)}{exp(b)}$

(4) **Démonstration par récurrence, pour n entier *naturel*** :
Soit a un réel et n un entier naturel ; on note $P(n)$ la propriété « $exp(na) = (exp(a))^n$ »

initialisation : La propriété $P(0)$ est vraie car $exp(0) = (exp(a))^0 = 1$

hérédité : supposons la propriété vraie au rang p (p entier naturel quelconque) ; étudions la propriété au rang $p+1$:

$exp((p+1)a) = exp(pa+a) = exp(pa) \times exp(a) = (exp(a))^p \times exp(a) = (exp(a))^{p+1}$: la propriété est vraie au rang $p+1$.

D'après le principe de récurrence, cette propriété est vraie pour tout entier naturel p.

Si n est un entier *négatif*, alors $-n$ est positif et :
$exp(na) = \dfrac{1}{exp(-na)} = \dfrac{1}{(exp(a))^{-n}} = (exp(a))^n$

2 - 3) La notation e^x

On pose $e = exp(1)$

Une calculatrice indique $e \approx 2,718$

Les propriétés démontrées précédemment permettent d'écrire :

$$exp(n) = exp(n \times 1) = (exp(1))^n = e^n, \text{ pour } n \text{ entier}$$

On **généralise** cette égalité pour tous les nombres réels :

Notation :

> On note e^x l'image de x par la fonction exponentielle : $exp(x) = e^x$

Les propriétés, déjà démontrées, de la fonction exponentielle s'écrivent alors avec cette nouvelle notation :

Propriétés :

> (1) La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même.
>
> (2) $e^0 = 1$
>
> (3) Quels que soient les réels a et b, $e^{a+b} = e^a \times e^b$
>
> (4) Quels que soient les réels a et b, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ et $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
>
> (5) Pour tout entier n, $e^{na} = (e^a)^n$
>
> (6) Quel que soit le réel x, e^x est strictement positif.

3) Étude de la fonction exponentielle

3 - 1) Variations de la fonction exponentielle

Théorème :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

COMMENTAIRES :

* Cette propriété a été précédemment démontrée et vient du fait que la fonction dérivée (elle-même) est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

* **Conséquences importantes** :
Pour tous nombres a et b :

(1) $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$ (2) $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$

Ces équivalences résultent de la stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Elles seront utilisées en particulier lors de la résolution d'équations et d'inéquations.

3 - 2) Limites à l'infini

Théorème :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

DÉMONSTRATION - BAC :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$:

Nous allons utiliser le théorème de comparaison en montrant que la fonction exponentielle est supérieure à une fonction dont on sait qu'elle tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

Une fonction très simple va convenir : $x \mapsto x$

Pour cela, on étudie la différence entre ces deux fonctions et on introduit la fonction f définie par $f(x) = e^x - x$

Le but est de montrer que $e^x > x$ et pour ce faire, nous allons montrer que la fonction f est toujours positive.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$

Cela permet de construire le tableau de variation de f :

x	$-\infty$				$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

f admet donc sur $\mathbb{R}$ le nombre 1 comme minimum : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$, ce qui donne $e^x > x$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

<u>$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$:</u>

Posons $Y = -x$; ainsi $e^x = e^{-Y}$

Remarquons que $\lim\limits_{x \to -\infty} Y = +\infty$ et que $e^x = e^{-Y} = \dfrac{1}{e^Y}$

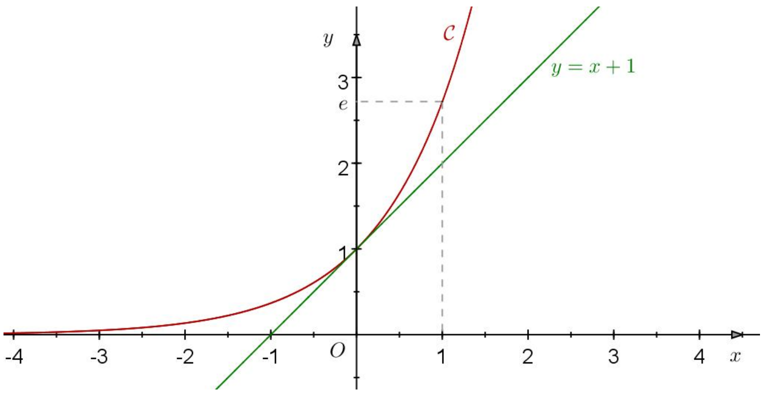
Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{Y \to +\infty} \dfrac{1}{e^Y}$; puisque $\lim\limits_{Y \to +\infty} e^Y = +\infty$, $\lim\limits_{Y \to +\infty} \dfrac{1}{e^Y} = 0$

Cela prouve que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

3 - 3) Courbe représentative de la fonction exponentielle

On peut résumer les résultats précédents dans le tableau de variation et sur la courbe représentative $\mathcal{C}$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$exp'(x)$		$+$	1	$+$	e	$+$	
$exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$



Commentaires :

* $\lim\limits_{x \to -\infty} = 0$: l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$

* La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = exp'(0)(x - 0) + exp(0)$, ce qui donne $y = x + 1$

3 - 4) Des limites importantes

Propriétés :

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad (2)\ \lim_{x\to-\infty} xe^x=0 \qquad (3)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Démonstrations :

(1) L'idée est de trouvée une fonction ayant pour limite $+\infty$ qui soit inférieure à $\dfrac{e^x}{x}$; on introduit f, fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$

On va étudier cette fonction pour montrer qu'elle est strictement positive ; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=e^x-x$; on ne peut rien dire du signe de f' ; on dérive à nouveau la fonction f' (qui est dérivable) : $f''(x)=e^x-1$

On a montré précédemment que pour $x\geqslant 0$, $e^x\geqslant 1$, ce qui veut dire que $f''(x)\geqslant 0$ et donc que f' est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Comme $f'(0)=1$, on en déduit que $f'(x)\geqslant 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$, et donc que f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Ainsi, pour $x\geqslant 0$, $e^x>\dfrac{x^2}{2}$

On résume ça par le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
f''	$+$
f'	1 $\nearrow$
signe de f'	$+$
f	1 $\nearrow$

Comme $x>0$, cela revient à $\dfrac{e^x}{x}>\dfrac{x}{2}$. Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$

Par le théorème de comparaison, on peut conclure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

(2) $xe^x=\dfrac{x}{e^{-x}}=-\dfrac{-x}{e^{-x}}$; donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{-x}{e^{-x}}\right)=\lim_{X\to+\infty}\left(-\frac{X}{e^X}\right)=0$

(3) La fonction $x\mapsto e^x$ est dérivable en 0 ; elle est égale à sa dérivée : $e^0=1$.

Le nombre dérivé de la fonction $x\mapsto e^x$ en 0 est donc 1.

Or, on peut interpréter la limite demandée comme le nombre dérivée de la fonction $x\mapsto e^x$ en 1, car $\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{e^x-e^0}{x-0}$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=exp'(0)=exp(0)=1$

4) Fonctions de la forme e^u

4 - 1) Dérivée et sens de variation de $x \mapsto e^{u(x)}$

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. On considère la composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle, c'est-à-dire de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$. On note e^u cette composée. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, donc l'ensemble de définition de e^u est le même que celui de u.

Propriétés :

(1) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $u'e^u$

(2) La fonction e^u a le même sens de variation que la fonction u.

Démonstrations :

(1) Cette propriété est admise.

(2) $e^u > 0$ donc $(e^u)'$ et u' ont le même signe.

Exemples :

* Soit $f(x) = e^{5x+2}$; f est de la forme e^u avec $u(x) = 5x + 2$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5e^{5x+2}$

$f'(x) > 0$ pour tout réel x, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

* Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; pour $x > 0$, f est de la forme e^u avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ donc f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) < 0$ pour tout réel x strictement positif, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4 - 2) Des fonctions e^u particulières

$\boxed{\text{Fonctions } f_k \ : \ x \mapsto e^{-kx},\ k > 0}$

exemples : $f_{0,5} = e^{-0,5x}$, $f_3 = e^{-3x}$

* **Signe** : les fonctions f_k sont positives.

* **Sens de variation** : $f_k'(x) = -ke^{-kx}$

Sachant que $k > 0$ et $e^{-kx} > 0$, on en déduit que $f_k'(x) < 0$

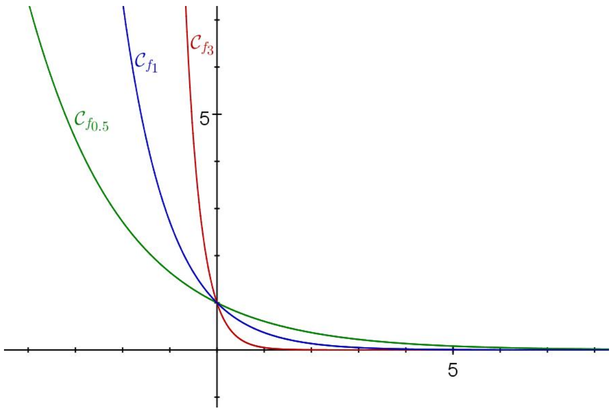
Les fonctions f_k sont donc décroissantes sur $\mathbb{R}$.

* **Limites** : $-kx$ est du signe contraire de x, donc :
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-kx} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-kx} = +\infty$

* **Tableau de variation** :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_k'(x)$		-	
f_k	$+\infty$	$\searrow$	0

* **Courbes représentatives** :



$\boxed{\text{Fonctions } g_k \ : \ x \mapsto e^{-kx^2},\ k > 0}$

exemples : $g_{0,5} = e^{-0,5x^2}$, $g_3 = e^{-3x^2}$

* **Signe** : les fonctions g_k sont positives.

* **Sens de variation** :
$g_k'(x) = -2kxe^{-kx}$

La dérivée a le signe contraire de x.

Les fonctions g_k sont donc croissantes sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissantes sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Elles admettent 1 comme maximum atteint en 0.

* **Limites** : $-kx^2 < 0$ sur $\mathbb{R}$, donc :
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-kx^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-kx^2} = 0$

* **Tableau de variation** :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_k'(x)$		+	0	-	
g_k	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

* **Courbes représentatives** :