

Chapitre 3

Compléments sur les fonctions numériques

1) Compléments sur la dérivation

1 - 1) Dérivées des fonctions $\sqrt{u}$ et u^n , $n \in \mathbb{Z}$

Théorème :

Si u est une fonction strictement positive, dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I , et pour tout x de I :

$$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

EXEMPLE :

$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ peut être vu comme $u(x) = x^2 + x + 1$, avec $f(x) = \sqrt{u(x)}$; au passage, on peut vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$.

D'après le théorème précédent, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$

DÉMONSTRATION :

Soit a un réel appartenant à I et h un réel tel que $a + h$ appartient à I .

Le taux d'accroissement de la fonction $\sqrt{u}$ entre a et $a + h$ est égal à :

$$\tau(h) = \frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}$ (c'est ce qu'on appelle la quantité « conjuguée » de $\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}$), on obtient :

$$\tau(h) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}}$$

u est continue en a donc : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}} = \frac{1}{2\sqrt{u(a)}}$

u est dérivable en a donc : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$

On obtient par produit de limites : $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = u'(a) \times \frac{1}{2\sqrt{u(a)}}$

Ainsi, $\sqrt{u}$ est dérivable en a et le nombre dérivé est égal à $\frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$

Ceci étant vrai pour tout a de I , on conclut que $\sqrt{u}$ est dérivable sur I avec $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Théorème :

n est un entier non nul.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , et si, lorsque n est négatif, u ne s'annule pas sur I , alors la fonction u^n est dérivable sur I , et pour tout x de I :

$$(u^n(x))' = n u'(x) u^{n-1}(x)$$

EXEMPLE :

$f(x) = (x^2 + x + 1)^3$ peut être vu comme $u(x) = x^2 + x + 1$, avec $f(x) = (u(x))^3$.

D'après le théorème précédent, $f'(x) = 3u'(x)u^{3-1}(x) = 3 \times (2x + 1)(x^2 + x + 1)^2$

DÉMONSTRATION :

Démonstration pour n entier naturel non nul :

Si u est la fonction nulle, ce résultat est bien vérifié. Sinon, on procède par récurrence.

u étant une fonction dérivable sur un intervalle I , on pose pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$:
« $(u^n(x))' = n u'(x) u^{n-1}(x)$ »

Initialisation : pour $n = 1$, $(u^1)' = u'$; d'autre part, $1 \times u' \times u^{1-1} = u'$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité : supposons que pour $p \geq 1$, $P(p)$ est vraie (c'est l'hypothèse de récurrence).

Montrons maintenant que $P(p + 1)$ est vraie :

$$(u^{p+1})' = (u \times u^p)' = u' \times u^p + u \times (u^p)' \text{ (par dérivation d'un produit)}$$

Cela donne, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$(u^{p+1})' = u' \times u^p + p \times u' u^{p-1} = u' \times u^p + p u' u^p = (p + 1) u' u^p$$

Cela montre que $P(p + 1)$ est vraie.

Conclusion : la proposition est vraie au rang 1, elle est héréditaire ; d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Démonstration pour n entier strictement négatif :

Il suffit de remarquer que $u^n = \frac{1}{u^{-n}}$ et qu'alors, $-n$ est un entier strictement positif.

On peut alors appliquer le résultat précédent à u^{-n} ; ainsi :

$$(u^n)' = \left(\frac{1}{u^{-n}} \right)' = - \frac{(u^{-n})'}{(u^{-n})^2} = - \frac{(-n)u' u^{-n-1}}{u^{-2n}} = n u' u^{-n-1+2n} = n u' u^{n-1}$$

On retrouve bien le résultat précédent.

1 - 2) Dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$

Théorème :

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, a et b deux nombres ($a \neq 0$).

Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée g' est définie par $g'(x) = af'(ax + b)$

EXEMPLE :

$g(x) = (2x + 3)^5$ peut être vu comme $f(2x + 3)$, avec $f(X) = X^5$; on a alors $f'(X) = 5X^4$

D'après le théorème précédent, $g'(x) = 2f'(2x + 3) = 2 \times 5(2x + 3)^4 = 10(2x + 3)^4$

DÉMONSTRATION :

Pour tout nombre $h \neq 0$, notons $\tau(h)$ le taux d'accroissement de g entre x et $x + h$:

$$\tau(h) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{f(ax+h) + b - f(ax+b)}{h}$$

Posons $ax + b = X$ et $ah = H$; alors, $\tau(h) = a \times \frac{f(X+H) - f(X)}{H}$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0} H = 0$ et $\lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(X+H) - f(X)}{H} = f'(H)$, par dérivabilité de la fonction f .

D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ax+b+ah) - f(ax+b)}{ah} = f'(ax+b)$$

Il en résulte que $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = a \times f'(ax+b)$. Ainsi, g est dérivable en x .

Ce résultat étant vrai pour tout nombre x de $\mathbb{R}$, g est dérivable et $g'(x) = af'(ax+b)$

2) Les fonctions sinus et cosinus

2 - 1) Définitions et propriétés des fonctions sinus et cosinus

Définitions :

- (1) La fonction **sinus** est la fonction qui, à tout réel x , associe $\sin(x)$.
- (2) La fonction **cosinus** est la fonction qui, à tout réel x , associe $\cos(x)$.

Propriétés :

- (1) Les fonctions sinus et cosinus sont **continues** sur $\mathbb{R}$.
- (2) Les fonctions sinus et cosinus sont **dérivables** sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\boxed{\sin'(x) = \cos(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}$$

- (3) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\boxed{\sin'(ax + b) = a \cos(ax + b)}$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\boxed{\cos'(ax + b) = -a \sin(ax + b)}$$

Périodicité :

Pour tout réel x , $\boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin(x)}$ et $\boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos(x)}$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π .

CONSÉQUENCE :

Pour tracer la courbe représentative de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle d'amplitude 2π , puis de compléter par des translations successives de vecteur $2\pi \vec{i}$ ou $-2\pi \vec{i}$.

Il en est de même pour la courbe représentative de la fonction cosinus.

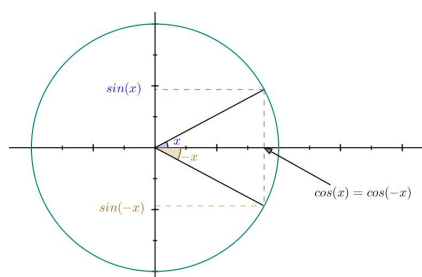
Parité :

Pour tout réel x , $\boxed{\sin(-x) = -\sin(x)}$ et $\boxed{\cos(-x) = \cos(x)}$

On dit que la fonction sinus est **impaire** et que la fonction cosinus est **paire**.

COMMENTAIRE :

On peut retrouver ces relations par les constructions suivantes, où l'on fait apparaître les angles x et $-x$ sur le **cercle trigonométrique** :



CONSÉQUENCE :

Dans un repère orthogonale, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère O . Celle de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2 - 2) Courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

Pour tracer la courbe représentative de la fonction sinus, il suffit de faire une étude sur $[0 ; \pi]$ puis de tenir compte des conséquences graphiques de la périodicité et de la parité de cette fonction.

On trace donc la courbe sur $[0 ; \pi]$ (en noir), puis on la complète par symétrie par rapport à O (en **bleu**), puis par translation (en **rouge** et en **vert**).

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x) = \cos(x)$	+	0	-
$\sin$	0	1	0

