Chapitre 2

Limites et continuité

Objectifs du chapitre :

item	*références*	*auto évaluation*				
déterminer la limite d'une fonction à l'infini						
déterminer la limite infinie d'une fonction en un réel a						
utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue						

1) Limite d'une fonction à l'infini

On étend ici aux fonctions la notion de limite étudiée pour les suites.

1 - 1) Limite finie à l'infini

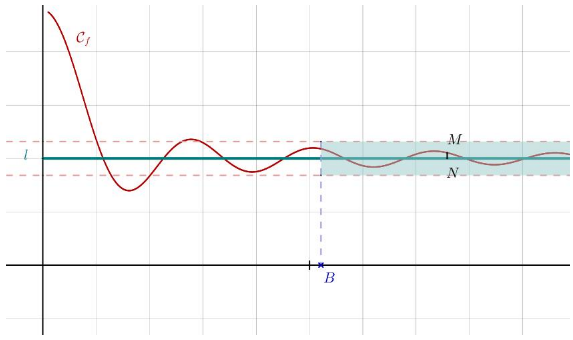
Définition :

Soit une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]\ a\ ;\ +\infty\ [$ et un réel l.

On dit que **f a pour limite l en $+\infty$**, lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

On écrit : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

Interprétation graphique



Autre formulation :

Une fonction f a pour limite l en $+\infty$ se traduit par :

Si on fixe un nombre $\epsilon > 0$, alors il existe un nombre réel A tel que, pour tout nombre $x \geqslant A$, $f(x) \in]l - \epsilon\ ;\ l + \epsilon[$

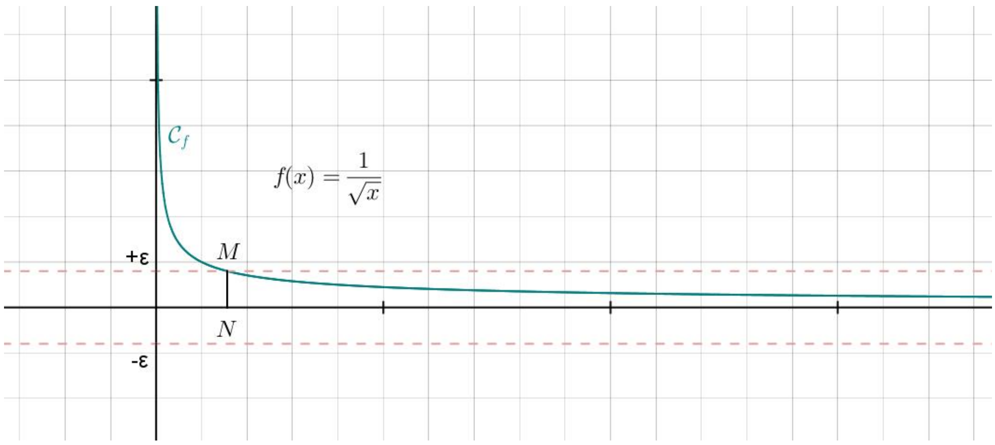
Commentaires :

* Sur la figure ci-dessus, la distance de $f(x)$ à l est représentée par la longueur MN ; on peut noter : $MN = |f(x) - l|$

* Dire que f a pour limite l en $+\infty$, c'est prouver que, quelle que soit une valeur ϵ choisie (aussi petite soit-elle), il existe (qu'on puisse l'expliciter ou non) une valeur B telle que pour toutes les valeurs de x supérieures à B, on ait $|f(x) - l| < \epsilon$.

Exemple :

On va prouver ici que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ en utilisant cette définition.



On doit donc prouver, que quelle que soit la valeur de ϵ, l'intervalle $]-\epsilon\ ;\ +\epsilon[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$, dès lors que x est suffisamment grand.

On fixe donc une valeur quelconque pour ϵ, valeur positive.

Alors, $|f(x)-0|<\epsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}}<\epsilon \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{\epsilon^2}$

Ainsi, dès qu'on choisit $x>\dfrac{1}{\epsilon^2}$, on aura $|f(x)-0|<\epsilon$, ce qui prouve bien que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

Remarque :

On définit de la même manière la limite en $-\infty$ en remplaçant « dès que x est assez grand » par « dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue ».

Définition :

> Lorsque f a pour limite l en $+\infty$ (en $-\infty$), on dit que la droite d'équation $y=l$ est **asymptote horizontale** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (en $-\infty$).

Exemple :

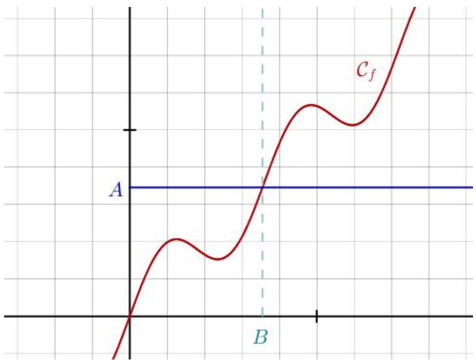
La droite d'équation $y=0$ (autrement dit, l'axe des abscisses) est asymptote horizontale de la courbe représentative de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1 - 2) Limite infinie à l'infini

Définition :

> Soit une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]\,a\ ;\ +\infty[$.
>
> On dit que f **a pour limite** $+\infty$ **en** $+\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]\,A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.
>
> On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Interprétation graphique



Commentaires :

* L'ordonnée de $f(x)$ peut être aussi grande qu'on le souhaite dès que x est assez grand.

* On définit de même : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

* Une fonction qui admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (ou $-\infty$) n'est pas majorée.

2) Limite infinie d'une fonction en un réel a

Définition :

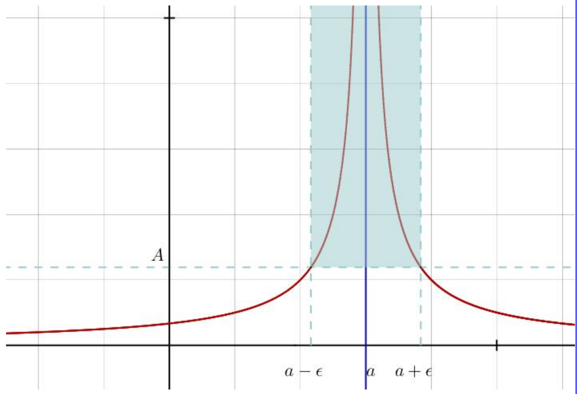
Limite infinie en un réel a

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert dont a est une borne.

On dit que **f a pour limite $+\infty$ en a**, lorsque tout intervalle de la forme $]\, A\, ;\, +\infty\, [$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a.

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Interprétation graphique



Commentaires :

* Sur la figure ci-dessus, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut dès lors qu'on se rapproche de a.

* On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Définition :

Limite infinie en un réel a, à droite

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert dont a est une borne.

On dit que **f a pour limite $+\infty$ en a à droite**, lorsque tout intervalle de la forme $]\, A\, ;\, +\infty\, [$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a, **x restant supérieur à a**.

On écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

Exemples :

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

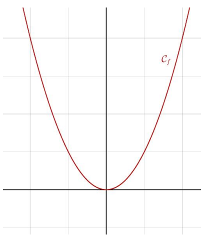
* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$

3) Détermination de limites

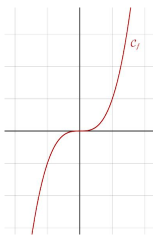
3 - 1) Limites des fonctions usuelles

Les résultats suivants sont à mémoriser ; ils seront utilisés tels quels dans les exercices. La représentation graphique est une aide précieuse à la mémorisation.

Fonctions puissance



$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$



$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

plus généralement

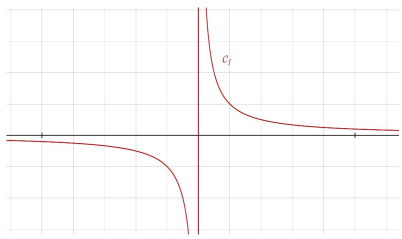
Si n est pair :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

si n est impair :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

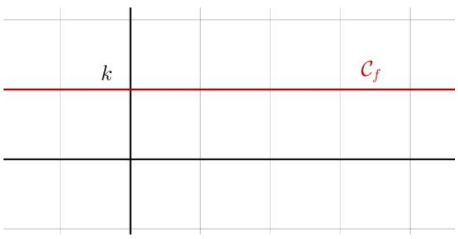
Fonction inverse



$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

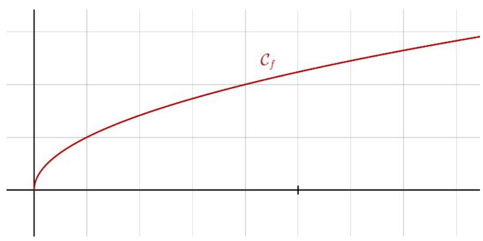
$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Fonction constante



$$\lim_{x\to-\infty} k = k \qquad \lim_{x\to+\infty} k = k$$

Fonction racine carrée



$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

3 - 2) Théorèmes généraux sur les limites

l et l' sont des réels, et le réel a peut être remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$:

Règles pour la somme

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(u(x)+v(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure directement (**Forme Indéterminée**)

Règles pour le produit

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	l	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	$l>0$ ou $+\infty$	$l<0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(u(x)\times v(x))$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**Forme Indéterminée**

Règles pour le quotient

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	l	$l\neq 0$	0	l	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$l'\neq 0$	0	0	$+\infty$ ou $-\infty$	l'	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	$+\infty$ ou $-\infty$ (*)	**F.I**	0	$+\infty$ ou $-\infty$ (*)	**F.I**

* le choix entre $+\infty$ et $-\infty$ est déterminé par le signe de $u(x)$ et $v(x)$

Exemple :

f est définie sur $]-\infty\,;\,0[$ par $f(x)=\dfrac{-2}{x^2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}(-2)=-2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}x^2=0^+$ (car $x^2>0$), donc par la règle du quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{-2}{x^2}=-\infty$

3 - 3) Limite d'une composée

Certaines fonctions ne peuvent pas être écrites comme somme, produit ou quotient de fonctions usuelles. Une autre opération sur les fonctions existe : la **composition**. Composer des fonctions, c'est réaliser des enchaînements de fonctions plus simples.

Exemple :

f est définie sur $]-\infty\,;\,1[$ par $f(x)=\sqrt{1-x}$

Pour calculer $f(x)$, on calcule d'abord $1-x$, puis on prend la racine carrée du résultat.

f est l'enchaînement de deux fonctions :

* u définie sur $]-\infty\,;\,1[$ par $u(x)=1-x$

* suivie de v définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $v(X)=\sqrt{X}$

On a : $f(x)=\sqrt{1-x}=v(1-x)=v(u(x))$

Le fait que f soit le fonction u suivie de la fonction v se note : $f=v\circ u$

Définition :

> v est une fonction définie sur un intervalle J et u est une fonction définie sur un intervalle I, tel que pour tout $x\in I$, $u(x)\in J$.
>
> La **fonction composée** u suivie de v est la fonction f définie sur I par $f(x)=v(u(x))$
>
> On note : $f=v\circ u$

Théorème :

> Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ et si $\lim\limits_{X\to b} v(X)=c$, alors $\lim\limits_{x\to a} v(u(x))=c$
>
> a, b et c désignent des réels, $+\infty$ ou $-\infty$

Commentaires :

* Ce théorème est admis.

* Il faut voir ce théorème comme un « transport » de limite par une fonction.

Exemple :

On reprend la fonction f est définie sur $]-\infty\,;\,1[$ par $f(x)=\sqrt{1-x}$

On cherche à établir la limite de cette fonction en $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$

3 - 4) Limite et comparaisons

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorèmes :

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]\, a\ ;\ +\infty\, [$, telles que pour tout réel $x > a$, $\boxed{f(x) \leqslant g(x)}$

Théorème de minoration :

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Théorème de majoration :

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Commentaires :

* Ces théorèmes sont admis.

* On obtient des théorèmes analogues en $-\infty$

* On obtient des théorèmes analogues quand x tend vers un réel a, en remplaçant $]\, a\ ;\ +\infty\, [$ par un intervalle $]\, a - \epsilon\ ;\ a\, [$ ou $]\, a\ ;\ a + \epsilon\, [$

Théorème d'encadrement dit « des gendarmes »

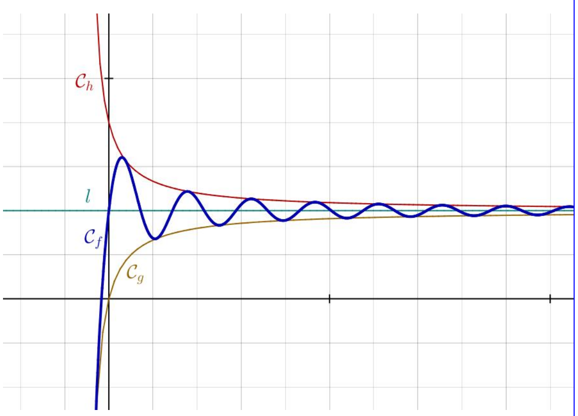
Soient trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]\, a\ ;\ +\infty\, [$, telles que pour tout réel $x > a$, $\boxed{f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)}$

On suppose que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l}$, où l est un nombre réel.

Alors g admet pour limite l en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = l$$

Interprétation graphique



Commentaires :

* Ce théorème est admis.

* On obtient un théorème d'encadrement analogue en $-\infty$.

4) Continuité

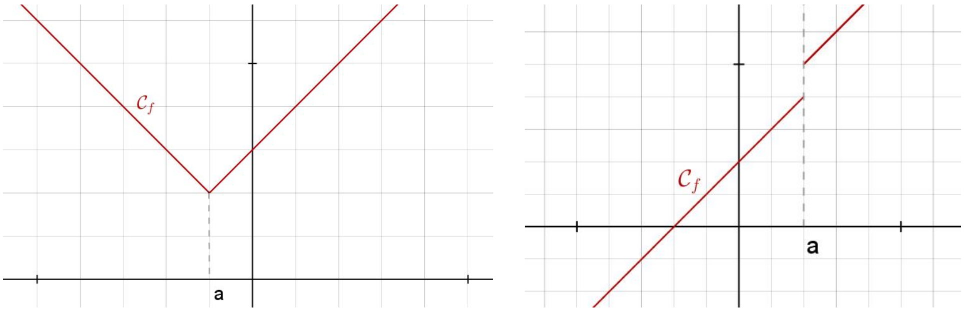
4 - 1) Définition et propriétés

Définition :

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.
>
> f est **continue** en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Commentaire :

La courbe représentative d'une fonction continue se trace « sans lever le crayon ».



f est continue en a — f n'est pas continue en a

Définition :

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
>
> f est **continue** sur I si elle est continue en tout point de I.

Commentaire :

Dans la pratique, on ne vérifiera pas la continuité d'une fonction en tout point ! Des résultats généraux donneront des renseignements sur des intervalles de $\mathbb{R}$. Il faudra parfois vérifier ponctuellement (pour un point précis) la continuité, et il faudra alors utiliser la définition précédemment donnée.

Propriété :

> Les fonctions dérivables sur un intervalle donné sont continues sur cet intervalle.

Remarques :

* Cette propriété est admise.

* **La réciproque de cette propriété est fausse** : par exemple, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0, mais elle y est continue.

Propriétés :

Soient u et v deux fonctions continues sur I.

(1) $u+v$, $u\times v$ et u^n (n entier naturel non nul) sont continues sur I.

(2) $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont continues sur les intervalles où elles sont définies.

Commentaire :

* Ces propriétés sont admises.

Exemples :

* La fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$ est continue sur $\mathbb{R}$.

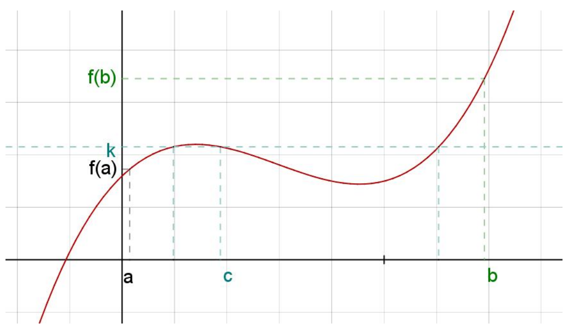
* La fonction $x \mapsto \dfrac{x-3}{x+1}$ est continue sur $]-\infty\,;\,-1[$ et sur $]-1\,;\,+\infty[$

4 - 2) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires

Si une fonction f est définie et continue sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$

Interprétation graphique



Commentaires :

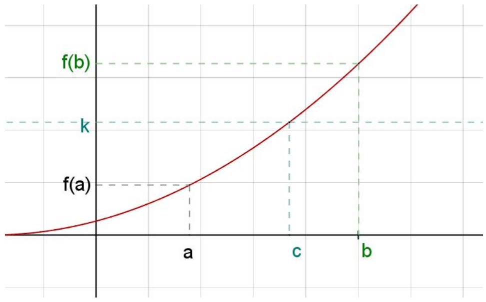
* Ce théorème est admis.

* Ce théorème traduit le fait que l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution, lorsque f est continue sur $[\,a\,;\,b\,]$ et que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Corollaire

Si une fonction f est **définie**, **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **une et une seule** solution dans l'intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$.

Interprétation graphique



Commentaires :

* Ce théorème est admis.

* Le corollaire s'applique aussi dans le cas d'un intervalle semi ouvert ($[\ a\ ;\ b\ [$ ou $]\ a\ ;\ b\ ]$), ou d'un intervalle ouvert ($]\ a\ ;\ b\ [$) : on remplace alors le calcul de $f(a)$ (ou de $f(b)$) par le calcul de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (ou de $\lim\limits_{x \to b} f(x)$), a et b pouvant être réels, $+\infty$ ou $-\infty$.

* Ce corollaire **permet d'affirmer l'existence d'une unique solution à une équation**, même si l'on ne sait pas la résoudre le calcul. On pourra chercher par ailleurs une valeur approchée de cette solution.

* **Convention dans les tableaux de variations** : on convient que les flèches obliques du tableau de variation d'une fonction f traduisent la **continuité** et la **stricte monotonie** de f sur l'intervalle correspondant.

Méthodes :

Si par ce théorème, on montre qu'une équation du type $f(x) = k$ admet une unique solution sur un intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$), on peut approcher cette solution par différentes méthodes :

* **méthode « par balayage »** :

Il s'agit de construire un tableau de valeurs à la calculatrice à partir de $x = a$ avec un pas de 1.

On en déduit alors un intervalle d'amplitude 1 où se trouve la solution.

On recommence le travail en partant de la borne inférieure de cet intervalle, avec un pas de 0,1.

En poursuivant le travail, on aura une valeur approchée, dont la précision dépendra du nombre d'étapes qu'on a menées.

* **méthode « par dichotomie »** :

Le principe est de déterminer successivement l'intervalle dans lequel se trouve la solution, en divisant par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque étape. On calcule à chaque fois le centre m de l'intervalle et on teste si la solution se trouve dans $[\ a\ ;\ m\ ]$ ou $[\ m\ ;\ b\ ]$.