durée : 4 h **calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

Proposition de corrigé

***Exercice* 1** : /2 points

Commun à tous les candidats

Restitution organisée de connaissances

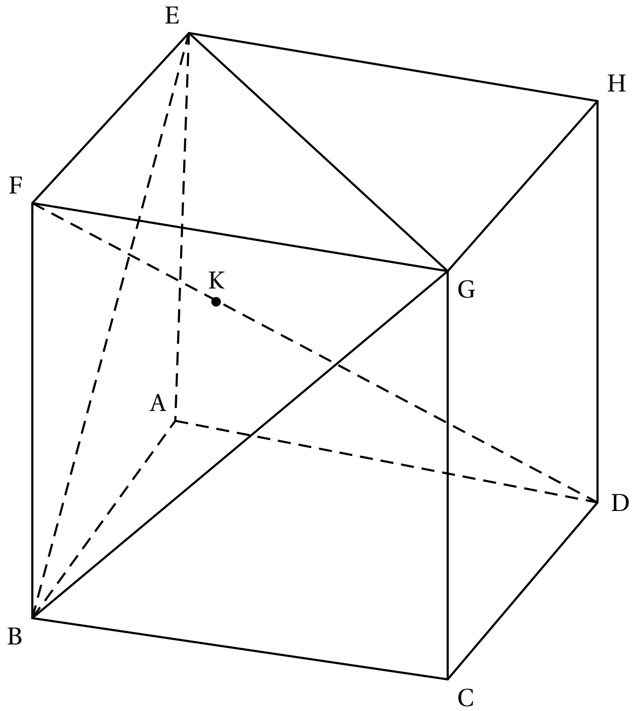
Soit Δ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et soit P un plan.
On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite D_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et la droite D_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.
Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et à D_2.

Voir le cours

***Exercice* 2** : /4 points

Commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

Dans le repère donné, A a pour coordonnées $(0\,,\,0\,,\,0)$, B$\,(1\,,\,0\,,\,0)$, D$\,(0\,,\,1\,,\,0)$ et E$\,(0\,,\,0\,,\,1)$.
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc le point F a pour coordonnées $(1\,,\,0\,,\,1)$.
La droite (FD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DF}$ de coordonnées $(1\,,\,-1\,,\,1)$; de plus elle passe par le point D$\,(0\,,\,1\,,\,0)$.

La droite (FD) a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = \quad t \\ y = 1 - t \\ z = \quad t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).

Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(1\,,\,-1\,,\,1)$. Ce vecteur est un vecteur normal au plan (BGE) s'il est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$ directeurs du plan (BGE).
$\overrightarrow{EB}$ a pour coordonnées $(1\,,\,0\,,\,-1)$; $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{EB} = 1\times 1 + (-1)\times 0 + 1\times(-1) = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{EB}$.
$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(1\,,\,1\,,\,0)$; $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BG} = 1\times 1 + (-1)\times 1 + 1\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{EG}$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{n}\,(1\,,\,-1\,,\,1)$ est normal au plan (BGE).

Le plan (BGE) a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et passe par le point B ; c'est l'ensemble des points M$\,(x\,,\,y\,,\,z)$ tels que $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{BM}$.
$\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(x-1\,,\,y\,,\,z)$;
$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{BM} \iff 1\times(x-1) + (-1)\times y + 1\times z = 0 \iff x - y + z - 1 = 0$.
L'équation cartésienne du plan (BGE) est $x - y + z - 1 = 0$.

3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées $\text{K}\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{DF}}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est normal au plan (BGE) donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE).
Les coordonnées (x, y, z) du point d'intersection de la droite (FD) et du plan (BGE) sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & 1-t \\ z = & t \\ x-y+z-1 = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & 1-t \\ z = & t \\ t-(1-t)+t-1 = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & 1-t \\ z = & t \\ 3t = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) au point K de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

4. Quelle est la nature du triangle BEG ? Déterminer son aire.

Les segments [BE], [EG] et [BG] sont tous les trois des diagonales de carrés de côtés 1 ; donc BE = EG = BG = $\sqrt{2}$. Le triangle BEG est équilatéral de côté $\sqrt{2}$.
Soit H le milieu de [EG] ; ce point est aussi le pied de la hauteur issue de B dans le triangle équilatéral BGE de côté $a = \sqrt{2}$.
Dans un triangle équilatéral de côté a, la hauteur est égale à $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (relations dans un triangle rectangle) ; donc dans le triangle équilatéral BEG, la hauteur $\text{BH} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
L'aire du triangle BEG vaut $\dfrac{\text{EG}\times\text{BH}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{12}}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. En déduire le volume du tétraèdre BEGD.

Le volume d'un tétraèdre est $\dfrac{\text{aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}$.
D'après les questions précédentes, le volume du tétraèdre BEGD est $\dfrac{\text{aire(BEG)}\times\text{KD}}{3}$.
Dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$:
$\text{KD}^2 = (x_D - x_K)^2 + \left(y_D - y_K\right)^2 + (z_D - z_K)^2 = \left(0-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(0-\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9} = \dfrac{12}{9}$ donc $KD = \sqrt{\dfrac{12}{9}} = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
Le volume du tétraèdre est donc : $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice **3** : /4 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\left\{\begin{array}{lll} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{array}\right.$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

   L'algorithme n° 1 calcule tous les termes de v_0 à v_n mais n'affiche que le dernier v_n.
   L'algorithme n° 2 calcule n fois de suite v_1 à partir de v_0 : il ne calcule pas les termes de 0 à v_n.
   L'algorithme n° 3 calcule tous les termes de 0 à v_n et les affiche tous : c'est cet algorithme qui convient.

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

   D'après les tables de valeurs de la suite, il semblerait que la suite soit croissante et converge vers un nombre proche de 3.

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   Montrons par récurrence la propriété $P_n : 0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n.
   Initialisation : $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie, puisque $v_0 = 1$; ainsi P_0 est vraie.
   Hérédité : Pour un n fixé, supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie.
   On suppose donc que $0 < v_n < 3$.
   Donc $6 = 6-0 > 6-v_n > 6-3 = 3$, puis
   $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{6-v_n} < \dfrac{1}{3}$, car la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
   $\dfrac{3}{2}\dfrac{9}{6} < \dfrac{9}{6-v_n} < \dfrac{9}{3} = 3$.
   Ainsi $1 < \dfrac{3}{2} < v_{n+1} < 3$. L'hérédité est établie puisque P_{n+1} est vraie.
   Conclusion : Par le principe de récurrence, $P_n : 0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$. La suite (v_n) est-elle monotone ?

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{9}{6-v_n} - v_n = \dfrac{9 - v_n(6-v_n)}{6-v_n} = \dfrac{(v_n-3)^2}{6-v_n}$.
Or, d'après la question précédente, $0 < v_n < 3$ pour tout n entier naturel, ainsi $6 - v_n$ est positif, donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(v_n-3)^2}{6-v_n} > 0$, ainsi la suite (v_n) est croissante.

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Comme la suite est majorée par 3 et croissante, alors elle converge vers une limite inférieure ou égale à 3.

d. Déterminer la valeur de cette limite.

On note l la limite de la suite (v_n) ; l vérifie : $l = \dfrac{9}{6-l}$, et l est compris entre 0 (inclus) et 3 (inclus). L'équation précédente revient à : $l^2 - 6l + 9 = 0$ ce qui donne finalement $l = 3$

On conclut que la suite (v_n) converge vers 3 (ce qui confirme la conjecture donnée au début de l'exercice).

***Exercice* 4** : /2 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

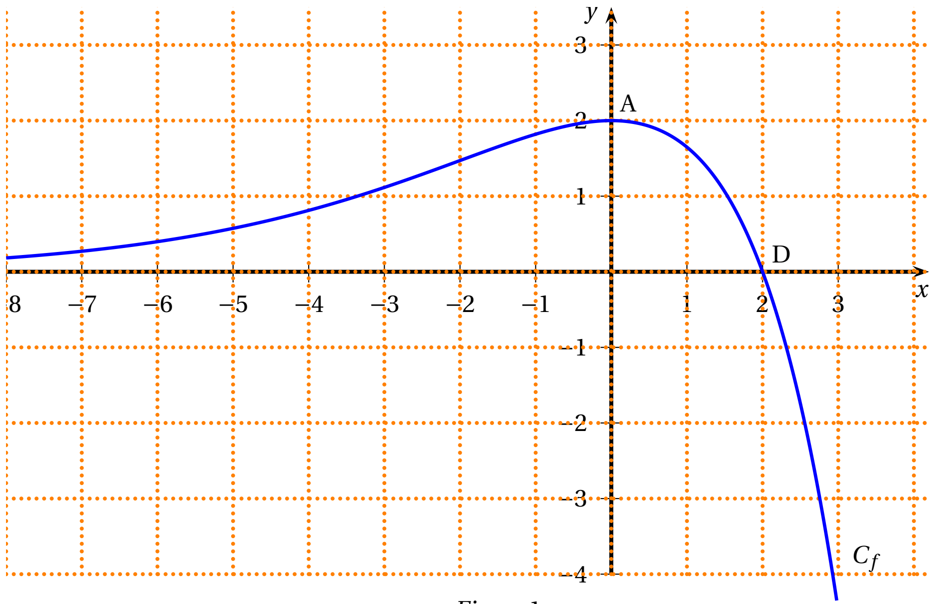


Figure 1

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b-x)\mathrm{e}^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.
On sait que :

- Les points A(0 ; 2) et D(2 ; 0) appartiennent à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.

   Le point D est sur la courbe C_f donc $\boxed{f(2) = 0}$. La tangente à la courbe C_f au point A $(0\,;\,2)$ est parallèle à l'axe des abscisses donc $\boxed{f'(0) = 0}$.

2. Exprimer $f'(x)$ à l'aide des paramètres a et b.

   $f'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{ax} + (b - x) \times a\mathrm{e}^{ax}$ donc $\boxed{f'(x) = (-1 + ab - ax)\mathrm{e}^{ax}}$.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les valeurs de a et b et donner l'expression de $f(x)$.

   D'une part $f(2) = 0$ donc $(b-2)\,\mathrm{e}^{2a} = 0$, or $\mathrm{e}^{ax} > 0$ donc $b - 2 = 0$.
   D'autre part $f'(0) = 0$ donc $(-1 + ab)\mathrm{e}^{0} = 0$ donc $ab - 1 = 0$.
   Finalement $\left\{\begin{array}{lcl} b-2 & = & 0 \\ ab-1 & = & 0 \end{array}\right.$
   $b - 2 = 0$ donne $b = 2$ et donc $2a - 1 = 0$ donc $a = \frac{1}{2} = 0,5$ donc $a = 0,5$ et $b = 2$.

   Ainsi, $\boxed{f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{0,5x}}$

***Exercice* 5** : /3 points

Commun à tous les candidats

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.
L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- les $\dfrac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- les $\dfrac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les évènements suivants :

C **:** « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;

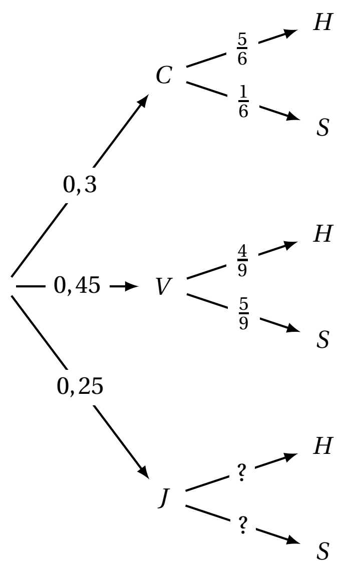
V **:** « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;

J **:** « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;

H **:** « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;

S **:** « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.



1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?

On veut $P(C \cap H) = P(C) \times P_C(H) = 0,3 \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{4}$.

2. On sait que $P(H) = \dfrac{13}{20}$.

a. Les évènements C et H sont-ils indépendants ?

Nous venons de calculer $P(C \cap H) = 0,25$ et
$P(C) \times P(H) = 0,3 \times \dfrac{13}{20} = \dfrac{39}{200} \neq P(C \cap H)$
Les évènements C et H ne sont pas indépendants.

b. Calculer $P_J(H)$.

D'après la loi des probabilités totales, $P(H) = P(H \cap C) + P(H \cap V) + P(H \cap J)$.
On a donc $P(J \cap H) = \dfrac{13}{20} - \dfrac{1}{4} - 0,45 \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{5}$
et $P_J(H) = \dfrac{P(J \cap H)}{P(J)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{5}$.

***Exercice* 6** : /5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n : $(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n$.

   Vrai

   $(1+i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 = \left(1+2i+i^2\right)^2 = (2i)^2 = -4$

   Ainsi, comme $(1+\mathrm{i})^{4n} = \left((1+i)^4\right)^n$, on obtient : $(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n$

2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
   Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

   Faux

   Les solutions de (E) sont : $z_1 = 4$, $z_2 = 2-2i$ et $z_3 = 2+2i$; on considère donc les points A_1, A_2 et A_3 d'affixe respective $z_1 = 4$, $z_2 = 2-2i$ et $z_3 = 2+2i$. (commentaire : là, il est utile de faire une figure et de placer les points A_1, A_2 et A_3 pour faire le bon choix de calcul).

   On évalue $\dfrac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$:

   $$\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3} = \frac{4-2+2i}{4-2-2i} = \frac{2+2i}{2-2i} = \frac{(2+2i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{4+8i-4}{4+4} = i$$

   On en déduit :
   – d'une part, $|z_1-z_2| = |z_1-z_3|$ et donc que $A_1A_2 = A_1A_3$
   – d'autre part, $arg\left(\dfrac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et donc que $\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
   Ainsi, le triangle $A_1A_2A_3$ est un triangle rectangle isocèle (un demi carré) avec $A_1A_2 = |z_1-z_2| = |2-2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

   L'aire de ce triangle rectangle est donc égale à $\dfrac{\left(\sqrt{8}\right)^2}{2} = 4$

3. **Proposition** : Pour tout nombre réel α, $1+\mathrm{e}^{2i\alpha} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos(\alpha)$.

   Vrai

   Évaluons chacun des membres de l'égalité :
   * $1+\mathrm{e}^{2i\alpha} = 1+2\cos(2\alpha)+i\sin(2\alpha)$
   * $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos(\alpha) = 2(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))\cos(\alpha) = 2(\cos(\alpha))^2+2i\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

   Or, $1+\cos(2\alpha) = 1+(\cos(\alpha))^2-(\sin(\alpha))^2 = (\cos(\alpha))^2+(\cos(\alpha))^2 = 2(\cos(\alpha))^2$

   Et, $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$

4. Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ et M_n le point d'affixe $(z_{\mathrm{A}})^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

   Vrai

   (commentaire : un dessin là aussi peut aider au choix du calcul le plus pertinent)

   Évaluons $arg\left(\dfrac{z_{M_n}-Z_O}{z_A-z_O}\right) = arg\left(\dfrac{z_{M_n}}{z_A}\right) = arg\left(\dfrac{(z_A)^n}{z_A}\right) = arg\left((z_a)^{n-1}\right) = (n-1)arg(z_A)$

   Or, $arg(z_A) = arg\left(\dfrac{1+i}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

   Ainsi, $\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OA}\right) = arg\left(\dfrac{z_{M_n}-Z_O}{z_A-z_O}\right) = (n-1)\times\dfrac{\pi}{4}$

   On conclut que si $n-1$ est divisible par 4, alors $\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OA}\right) = k\times\pi$, avec k un entier et donc que les points O, A et M_n sont alignés.

5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

Proposition : $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$.

$1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2$ est la somme d'une suite géométrique de raison j (différente de 1) ; on peut donc appliquer le résultat sur la somme d'une telle suite :

$1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=\dfrac{1-j^3}{1-j}$

Or, $j^3=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=e^{i\frac{3\times 2\pi}{3}}=e^{2i\pi}=1$

Ainsi, $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=\dfrac{1-1}{1-j}=0$

***Exercice* 7** : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E)
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ (F).

1. On suppose $m \leqslant 4$.
   Par disjonction de cas, montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.
   a. Montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors
   $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
   b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
   c. En déduire que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors
   $7^n \equiv 1 \pmod 5$.
   d. Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).