durée : 4 h **calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

***Exercice* 1** : / 5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;\,+\infty[$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$
e^{-x} étant toujours strictement positif, $f'(x)$ sera du signe de $1-x$.
Il s'ensuit que

$$f'(x) \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad [0,\,1] \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \quad \text{sur} \quad]1,\,+\infty[$$

f est donc croissante sur $[0,\,1]$ et décroissante sur $]1,\,+\infty[$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$, ce qui signifie que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$

Partie B

Soit $\mathscr{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0;\,+\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $\mathscr{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$.

Comme la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0;\,+\infty[$ alors

$$\mathscr{A}(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

et donc, pour tout $t \in [0;\,+\infty[$ $\quad \mathscr{A}'(t) = f(t)$
Comme f est positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ il s'ensuit que la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathscr{A}$?

On peut en déduire que la fonction $\mathscr{A}$ a pour limite 1 en $+\infty$.

3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x = \alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.

a. Démontrer que l'équation $\mathscr{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$

Dressons le tableau de variations de la fonction $\mathscr{A}$ sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$\mathscr{A}$'		$+$	
$\mathscr{A}$	0	$\nearrow$	1

D'après ce tableau de variations l'équation $\mathscr{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$

b. Sur le graphique fourni en **annexe** (***à rendre avec la copie***) sont tracées la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que la courbe Γ représentant la fonction $\mathscr{A}$.
Sur le graphique de l'**annexe**, identifier les courbes $\mathscr{C}$ et Γ, puis tracer la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$. En déduire une valeur approchée du réel α. Hachurer le domaine correspondant à $\mathscr{A}(\alpha)$.

Par lecture graphique, $\alpha \approx 1,63$

4. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0;\,+\infty[$ par $g(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0;\,+\infty[$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[0;\,+\infty[$, calculer $g'(x)$.

$g'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = -x\,\mathrm{e}^{-x}$

b. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0;\,+\infty[$, une expression de $\mathscr{A}(t)$.

On remarque que $g'(x) = -f(x)$, d'où

$$\mathscr{A}(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t -g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[-g(x)\right]_0^t = -g(t) + g(0) = 1 - (1+t)\mathrm{e}^{-t}$$

c. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathscr{A}(6)$.

$\mathscr{A}(6) = 1 - 7\mathrm{e}^{-6} \simeq 0{,}98$

Exercice **2** : /5 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

$u_1 = u_0 = 2 \times 0 + 2 = 2$ et $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2 = 6$.

2. On considère les deux algorithmes suivants :

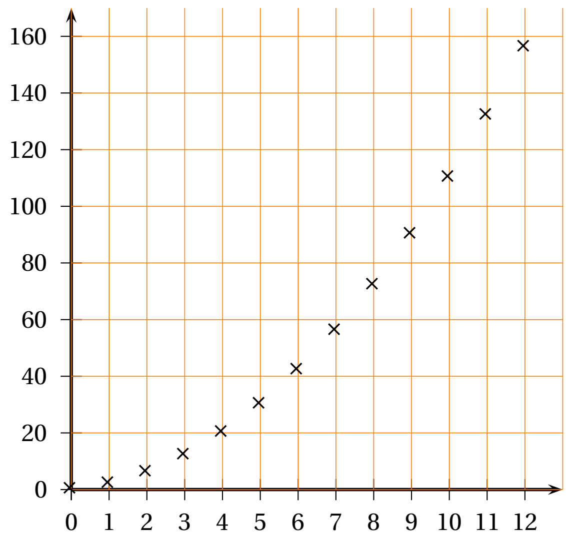
Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel	**Variables :**	n est un entier naturel
	u est un réel		u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0	**Traitement :**	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :		Pour i allant de 0 à $n-1$:
	u prend la valeur $u+2i+2$		u prend la valeur $u+2i+2$
	Fin Pour		Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

Le second affiche en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur.

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

La suite (u_n) semble être croissante.
Démonstration :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 2 - u_n = 2n + 2 > 0 \text{ pour tout } n \text{ naturel}$$

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.

Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \\ u_1 = a \times 1^2 + b \times 1 + c = 2 \\ u_2 = a \times 2^2 + b \times 2 + c = 6 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = 2 \\ 4a + 2b = 6 \\ c = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{array}\right.$$

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

$v_n = u_{n+1} - u_n = 2n + 2$

C'est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 2$.

b. On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = (n+1)\,v_0 + \frac{n(n+1)}{2} \times r = 2(n+1) + n(n+1) = (n+1)(n+2)$$

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

$$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) + (u_{n+1} - u_n) = u_{n+1} - u_0$$

$$S_{n-1} = u_n - u_0 \Longleftrightarrow u_n = S_{n-1} + u_0 = n(n+1) + 0 = n(n+1)$$

***Exercice* 3** : / 3 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1
Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.
Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,150 **c.** 0,462 **d.** 0,700

Avec des notations évidentes : $p_B(F) = \dfrac{p(B \cap F)}{p(B)}$.
Or $p(B) = p(B \cap F) + p(B \cap H) = 0,75 \times \frac{1}{5} + 0,25 \times \frac{7}{10} = 0,15 + 0,175 = 0,325$.
D'où $p_B(F) == \dfrac{0,15}{0,325} = \dfrac{150}{325} = \dfrac{6}{13} \approx 0,462$.

Question 2
Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à $0,3$. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.
La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,900 **b.** 0,092 **c.** 0,002 **d.** 0,267

On a une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.
On a donc $p(X = 3) = \binom{10}{3}0,3^3 \times (1-0,3)^{10-3} = 120 \times 0,027 \times 0,823543 \approx 0,2668 \approx 0,267$.

Question 3
Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \dfrac{1}{8}$.
La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,250 **c.** 0,472 **d.** 0,528

On a $p(X \geqslant 6) = 1 - \displaystyle\int_0^6 \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\right]_0^6 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\times 6} \approx 0,4723 \approx 0,472$.

***Exercice* 4** : / 2 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; 2 ; 5), B(−1 ; 6 ; 4) et C(7 ; −10 ; 8).

1. **Proposition 1 :** Les points A, B et C définissent un plan.

   La proposition est **fausse** ; en effet, on a : $\overrightarrow{AB}\,(-2\,;\,4\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(6\,;\,-12\,;\,3)$, ces deux vecteurs sont colinéaires (car $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$), donc les trois points A, B et C sont alignés et ne définissent pas un plan.

2. **Proposition 2 :** Une représentation paramétrique de la droite (AC) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{3}{2}t-5 \\ y & = & -3t+14 \qquad t\in\mathbb{R} \\ z & = & -\dfrac{3}{2}t+2 \end{array}\right.$$

   La proposition est **fausse** : la droite dont la représentation paramétrique est donnée dans l'énoncé est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\left(\frac{3}{2}\,;\,-3\,;\,-\frac{3}{2}\right)$, ce vecteur n'étant pas colinéaire à $\overrightarrow{AC}$, il ne peut diriger (AC).

***Exercice* 5** : / 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice comporte trois parties qui peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Dans tout l'exercice, on désigne par (E) l'équation

$$z^4+4z^2+16=0$$

d'inconnue complexe z.

Partie A : restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x+\text{i}y$ où $x\in\mathbb{R}$ et $y\in R$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $z = x-\text{i}y$.
Démontrer que :

1. Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

   Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Il existe donc quatre nombres réels x_1 ; y_1 ; x_2 et y_2 tels que $z_1 = x_1+\imath y_1$ et $z_2 = x_2+\imath y_2$.
   On a alors $z_1z_2 = (x_1+\imath y_1)(x_2+\imath y_2)$
   $= x_1x_2+\imath x_1y_2+\imath y_1x_2+\imath^2y_1y_2$
   $= (x_1x_2-y_1y_2)+\imath(x_1y_2+x_2y_1)$

   Comme les nombres x_1, x_2, y_1 et y_2 sont réels, alors on peut définir les nombres $x_3 = x_1x_2-y_1y_2$ et $y_3 = x_1y_2+x_2y_1$, qui sont réels également.

On a donc écrit le produit z_1z_2 sous la forme $x_3 + \imath y_3$, où x_3 et y_3 sont des nombres réels, donc le conjugué de z_1z_2 est :
$\overline{z_1z_2} = x_3 - \imath y_3 = (x_1x_2 - y_1y_2) - \imath(x_1y_2 + x_2y_1)$.
Par ailleurs, calculons le produit : $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (x_1 - \imath y_1) \times (x_2 - \imath y_2)$
$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = x_1x_2 - \imath x_1y_2 - \imath y_2x_1 + (-\imath)^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) - \imath(x_1y_2 + x_2y_1) = \overline{z_1z_2}$
Nous avons donc démontré que pour deux nombres complexes quelconques z_1 et z_2, on a : $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1z_2}$.

2. Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$

La propriété sera démontrée par récurrence. Posons, pour tout entier naturel n non nul la propriété $\mathscr{P}_n$, qui dit que pour tout complexe z, on a $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $z^1 = z$, donc $\overline{z^1} = \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^1$: *la propriété $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.*
Hérédité : Pour un entier k naturel non nul, on suppose vraie la propriété $\mathscr{P}_k$, c'est à dire que l'on suppose que pour tout complexe z, on a $\overline{z^k} = \left(\overline{z}\right)^k$.
On souhaite maintenant démontrer que si cette propriété est vraie, alors la propriété suivante doit être vraie aussi.
Soit z un nombre complexe. On s'intéresse donc à $\overline{z^{k+1}}$. On a $z^{k+1} = z^k \times z$, donc :

$$\begin{aligned}
\overline{z^{k+1}} &= \overline{z^k \times z} && \\
&= \overline{z^k} \times \overline{z} && \text{application de la propriété précédente.}\\
&= \left(\overline{z}\right)^k \times \overline{z} && \text{par hypothèse de récurrence.}\\
&= \left(\overline{z}\right)^{k+1} && \text{ce qui constitue la propriété } \mathscr{P}_{k+1}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que si la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie, cela implique que $\mathscr{P}_{k+1}$ l'est également : *la propriété est héréditaire.*
Conclusion : La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire, donc, on peut donc dire que pour tout entier n naturel non nul, et pour tout nombre complexe z, on a $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Partie B

1. En utilisant les résultats de la partie A, montrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).

Si z est solution de (E), alors : $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$

Or, $$\begin{aligned}\overline{z^4 + 4z^2 + 16} &= \overline{z^4} + \overline{z^2} + \overline{16}\\ &= \overline{z}^4 + \overline{z}^2 + 16\end{aligned}$$

Ainsi, si $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$, alors $\overline{z^4 + 4z^2 + 16} = \overline{0} = 0$ et donc $\overline{z}^4 + \overline{z}^2 + 16 = 0$ ce qui signifie que $\overline{z}$ est solution de (E).

2. En remarquant que si z est une solution de l'équation (E), alors $-z$ l'est aussi, montrer que si on a trouvé une solution de l'équation (E), on en a trouvé quatre.

Si z est solution de (E), alors $-z$, $\overline{z}$ et $-\overline{z}$ sont aussi solutions : en trouvant une seule solution, on en trouve quatre (en vérifiant que ces expressions donnent des valeurs différentes).

3. Justifier le fait que l'équation (E) admette au maximum quatre solutions.

remarque : on pourra raisonner par l'absurde en supposant que (E) admette cinq racines et donner alors une écriture factorisée de $z^4 + 4z^2 + 16$ afin de mettre en évidence une contradiction.

Supposons qu'il existe 5 racines notées z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5 ; la forme factorisée de $z^4 + 4z^2 + 16$ serait : $(z - z_2) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3) \cdot (z - z_4) \cdot (z - z_5)$

En développant cette expression, on trouve une expression de degré 5, ce qui est incohérent avec l'expression $z^4 + 4z^2 + 16$ qui est de degré 4.

Partie C : résolution de (E)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
Écrire les solutions de cette équation sous une forme algébrique et sous forme exponentielle.

Nous avons une équation de degré 2, à coefficients réels. On va donc calculer le discriminant Δ du trinôme du second degré.
$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = 16 - 4 \times 16 = -3 \times 16 = -48$.
Le discriminant étant strictement négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées, qui sont : $Z_1 = \dfrac{-4 - \imath\sqrt{48}}{2} = \dfrac{-4 - 4\imath\sqrt{3}}{2} = -2 - 2\imath\sqrt{3}$ et $Z_2 = \overline{Z_1} = -2 + 2\imath\sqrt{3}$.

Présentons maintenant ces nombres sous leur forme exponentielle, en commençant par calculer le module de Z_1 : $|Z_1| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$.
On peut donc écrire : $Z_1 = 4 \times \left(\dfrac{-2}{4} + \imath\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}\right) = 4 \times \left(\dfrac{-1}{2} + \imath\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Un argument de Z_1 sera donc un angle dont le cosinus est $\dfrac{-1}{2}$ et le sinus est $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, donc $\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$ dont la mesure principale est $\dfrac{-2\pi}{3}$.

La forme exponentielle de Z_1 est donc : $Z_1 = 4e^{\frac{-2\imath\pi}{3}}$, et puisque Z_2 est le conjugué de Z_1, d'après les propriétés des modules et arguments : $Z_2 = 4e^{\frac{2\imath\pi}{3}}$.

L'équation admet donc deux solutions, qui sous leurs formes exponentielles sont : $Z_1 = 4e^{\frac{-2\imath\pi}{3}}$ et $Z_2 = 4e^{\frac{2\imath\pi}{3}}$.

2. Montrer que si $a = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors a^2 est une des deux solutions trouvées à la question précédente.

Si $a = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$, $a^2 = \left(2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 2^2 \cdot e^{i2\cdot\frac{\pi}{3}} = 4 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} = 4 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, ce qui est bien une des racines trouvées précédemment.

3. En déduire les quatre solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) (données au choix, sous forme exponentielle ou algébrique).

Les solutions sont : $2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $-2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $-2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

Ce qui donne sous forme algébrique : $-1 - \sqrt{3}\,\imath$, $1 + 1\sqrt{3}\,\imath$, $-1 + 1\sqrt{3}\,\imath$ et $1 - 1\sqrt{3}\,\imath$

Exercice **6** : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1+2+\ldots+n$.
Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1+2+3+4$.
Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.

On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.
2. **a.** Montrer que le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2+n-2p^2 = 0$.

   b. En déduire que le nombre $1+2+\ldots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2-8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne

$$x^2-8y^2 = 1,$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).
2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.
3. Démontrer que $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'\ ;\ y')$ est solution de (E).
4. On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n.

   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2015 qui est le carré d'un entier.

Annexe 1
À rendre avec la copie

EXERCICE 1
Représentations graphiques des fonctions f et $\mathscr{A}$