durée : 4 h **calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

Proposition de corrigé

***Exercice* 1** : / 3 points

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; 2 ; 5), B(−1 ; 6 ; 4) et C(7 ; −10 ; 8).

1. Les points A, B et C définissent-ils un plan ? (réponse à justifier)

On va étudier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en déterminant leurs coordonnées :

$\overrightarrow{AB} = (-2\,;\,4\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AC} = (6\,;\,-12\,;\,3)$; on a donc : $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$

Les vecteurs étant colinéaires, les points **A, B et C sont alignés et ne définissent donc pas de plan**.

2. Déterminer une équation paramétrique (de paramètre t) de la droite (AB).

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires $\iff$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$

$$\iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-5 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 & = & -2t \\ y-2 & = & 4t \\ z-5 & = & -t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-2t \\ y & = & 2+4t \\ z & = & 5-t \end{array}\right.$$

(AB) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-2t \\ y & = & 2+4t \\ z & = & 5-t \end{array}\right.$

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation paramétrique (de paramètres u et v)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3+u \\ y & = & 1-v \\ z & = & 5-u \end{array}\right.$$

Déterminer $(AB) \cap \mathscr{P}$.

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (AB) \cap \mathscr{P} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-2t \\ y & = & 2+4t \\ z & = & 5-t \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3+u \\ y & = & 1-v \\ z & = & 5-u \end{array}\right.$$

On résout $\left\{\begin{array}{rcl} 1-2t & = & 3+u \\ 2+4t & = & 1-v \\ 5-t & = & 5-u \end{array}\right.$

La dernière ligne donne : $t = u$ et en remplaçant u par t dans la première ligne, on obtient : $t = -\dfrac{2}{3}$

Ensuite, en remplaçant t par sa valeur dans l'équation paramétrique de la droite (AB), on obtient : $x = \dfrac{7}{3}$, $y = -\dfrac{2}{3}$ et $z = \dfrac{17}{3}$

Conclusion : la droite (AB) et le plan $\mathscr{P}$ se coupent au point M de coordonnées $\left(\dfrac{7}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{17}{3}\right)$

***Exercice* 2** : / 5 points

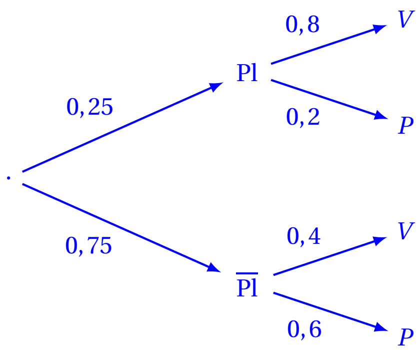
Commun à tous les candidats

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.
Affirmation nº 1 :
« Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

Affirmation nº 1 : VRAIE

Arbre de probabilités :



Pl : il pleut ; V : en voiture ; P : à pied

On cherche $p(V)$:

$$\begin{aligned} p(V) &= p(V \cap \text{Pl}) + p(V \cap \overline{\text{Pl}}) \\ &= p_{\text{Pl}}(V) \times p(\text{Pl}) + p_{\overline{\text{Pl}}}(V) \times p(\overline{\text{Pl}}) \\ &= 0,8 \times 0,25 + 0,4 \times 0,75 = 0,5 \end{aligned}$$

« Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

2. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B.
Affirmation nº 2 :
« Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. »

Affirmation nº 2 : VRAIE

A et B sont indépendants signifie que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$:

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p(B) + p(A \cap \overline{B})$$

$$\Longrightarrow p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A) \times p(B) = p(A)\left(1 - p(B)\right) = p(A) \times p(\overline{B})$$

3. On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,7.
Affirmation nº 3 :
« La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est 0,7 environ. »

Affirmation n° 3 : FAUX

$$p(T \leqslant 5) = \int_0^5 0,7\mathrm{e}^{-0,7x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0,7x}\right]_0^5 = 1 - \mathrm{e}^{-0,7\times 5} \approx 0,97$$

La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est :

$$p(T > 5) = 1 - p(T \leqslant 5) \approx 0,03$$

Affirmation n° 4 :
« Le temps d'attente moyen à ce guichet est de sept minutes. »

Affirmation n° 4 : FAUX

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,7} \simeq 1,42$$

« Le temps d'attente moyen à ce guichet est d'environ 1 minute et demi. »

4. On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+.
On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A+.
Affirmation n° 5 :
« On ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. »

Affirmation n° 5 : VRAIE

Comme $0,2 < p < 0,8$, on peut utiliser la formule donnant l'intervalle de fluctuation :
$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$; cela donne ici (valeurs approchées au centième) : $[0,32\ ;\ 0,46]$: comme 0,34 appartient à cet intervalle, rien ne permet de rejeter l'hypothèse donnant une proportion égale à 39 % de personnes du groupe A+ au sein de la population.

Autre méthode avec la loi binomiale : on s'attend, sur 183 personnes, à avoir environ 71 qui sont du groupe A+ (39 % de 183) ; comme on n'en a que 34 % (soit environ 62 personnes), on va se demander si 62 est inférieur ou pas à la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation donné par une loi binomiale de paramètres $n = 183$ et $p = 0,39$.

Pour cela, on calcule $P(X \leqslant 62)$, où X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 183$ et $p = 0,39$.

Or, $P(X \leqslant 62) \approx 0,09 > 0,025$: cet effectif est bien à l'intérieur de l'intervalle de fluctuation ; on a (heureusement !) la même conclusion que précédemment.

Exercice **3** : / 7 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée
$0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

- $f_1(0) = 0$: évident ;
- $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$;
- f_1 fonction polynôme est dérivable sur $[0 ; 1]$ donc continue sur cet intervalle ;
- $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3\left(4x^2 - 4x + 1\right) = 3(2x-1)^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; 1]$.

f_1 est donc bien une fonction de retouche.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, **à rendre avec la copie**, en faisant apparaître les pointillés utiles.
Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

Il semble que la courbe coupe la droite d'équation $y = x$ pour $x = 0,5$.
On peut vérifier que $f_1(0,5) = 0,5$.
On a donc $f_1(x) \leqslant x \iff x \geqslant 0,5$.
Ce résultat signifie que f_1 éclaircie les nuances codées par un nombre inférieur à 0,5 et inversement pour celles codées par un réel entre 0,5 et 1.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1+(\mathrm{e}-1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.
On définit sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a. Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$: $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}$;

f_2 est une fonction dérivable car composée de fonctions dérivables, donc g l'est aussi et :
$g'(x) = f_2'(x) - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{1+(\mathrm{e}-1)x} - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1-1-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x} = \dfrac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}$.

b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

Comme $\mathrm{e} > 1$, le dénominateur est positif comme somme de termes positifs ; le signe de $g'(x)$ est donc celui de son numérateur ; or

$\mathrm{e}-2-(\mathrm{e}-1)x \geqslant 0 \iff \mathrm{e}-2 \geqslant (\mathrm{e}-1)x \iff \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \geqslant x$

On a $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \approx 0,418$.

On a donc avec $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} = a$,
$g'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant a$ et de même
$g'(x) \leqslant 0 \iff x \geqslant a$.
La fonction g est donc croissante sur $[0\,;a]$, puis décroissante sur $[a\,;\,1]$.
g a donc un maximum $g(a) \approx 0,12$.

c. Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.
On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

D'après la question précédente sur l'intervalle $[0\,;\,a]$ la fonction g est continue et croissante de $g(0) = 0$ à $g(a) \approx 0,12$.
Comme $0,05 \in [0\,;\,a]$, il existe une valeur unique α de $[0\,;\,a]$ telle que $f(\alpha) = 0,05$.
On démontre de même (avec g décroissante) que sur $[a\,;\,1]$ il existe un réel unique β tel que $g(\beta) = 0,05$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0,05$.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale) y (nuance retouchée) E (écart) c (compteur) k
Initialisation :	c prend la valeur 0

Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire
	    x prend la valeur $\frac{k}{100}$
	    y prend la valeur $f(x)$
	    E prend la valeur $\lvert y-x\rvert$
	        Si $E \geqslant 0,05$, faire
	            c prend la valeur $c+1$
	        Fin si
	Fin pour

Sortie :	Afficher c

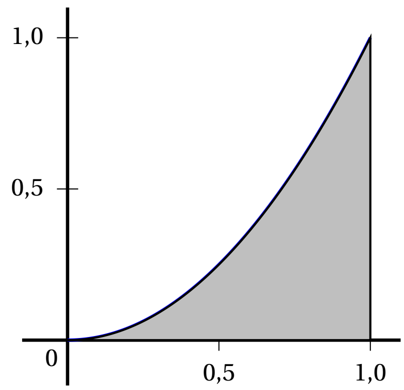
Cet algorithme calcule le nombre de nuances par palier de 0,01 pour lesquelles la modification est perceptible visuellement.

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

On applique l'algorithme à la fonction $g = f_2 - x$. Il calcule toutes valeurs telles que $g(x) \geqslant 0,05$.
Ce sont d'après la question précédente toutes les nuances comprises entre 0,09 et 0,85 : l'algorithme doit donc retourner : $c = 85 - 9 + 1 = 77$.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-a-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant x$.
On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathcal{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :



$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)} \qquad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. a. Calculer $\mathcal{A}_{f_1}$.

f_1 produit de fonctions positives sur $[0\,;\,1]$ est positive sur cet intervalle. On a donc :
$\mathcal{A}_{f_1} = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)$.

b. Calculer $\mathcal{A}_{f_2}$

On a $f_2(0) = -15 + 15 = 0$ et comme il est admis qu'elle est une fonction de retouche elle est croissante sur $[0\,;\,1]$, donc positive sur cet intervalle. On a donc :
$\mathcal{A}_{f_2} = \displaystyle\int_0^1 \left(4x - 15 + \frac{60}{x+4}\right)\mathrm{d}x = \left[2x^2 - 15x + 60\ln(x+4)\right]_0^1 =$
$2 - 15 + 60\ln 5 - 60\ln 4 = -13 + 60\ln\frac{5}{4}$.

2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

On a $\mathscr{A}_{f_1} = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0,316$ et $\mathscr{A}_{f_2} = -13+60\ln\frac{5}{4} \approx 0,389$.
C'est la fonction f_1 qui éclaircit le plus l'image.

***Exercice* 4** : / 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{5}u_n + 3\times 0,5^n. \end{array}\right.$$

1. **a.** Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

Au vu du tableau précédent, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

2. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0,5^n.$$

Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0,5^n$ ». Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

- **Initialisation.** On a $u_1 = 3,4$ et $\frac{15}{4}\times 0,5 = 1,875$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel k non nul, la propriété $\mathscr{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$u_k \geqslant \frac{15}{4}\times 0,5^k \qquad \text{(HR)}$$

on doit alors démontrer que la propriété $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geqslant \frac{15}{4}\times 0,5^{k+1}$.
D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{rcll} u_k & \geqslant & \dfrac{15}{4}\times 0,5^k & \text{donc, en multipliant par } \dfrac{1}{5} : \\ \dfrac{1}{5}u_k & \geqslant & \dfrac{3}{4}\times 0,5^k & \text{puis, en ajoutant membre à membre } 3\times 0,5^k : \\ \dfrac{1}{5}u_k + 3\times 0,5^k & \geqslant & \dfrac{3}{4}\times 0,5^k + 3\times 0,5^k & \text{c'est-à-dire :} \\ u_{k+1} & \geqslant & \dfrac{15}{4}\times 0,5^k & \end{array}$$

Or, pour tout entier naturel k, $0,5^k \geqslant 0,5^{k+1}$, on en déduit donc que :

$$u_{k+1} \geqslant \frac{15}{4}\times 0,5^{k+1}$$

et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est donc héréditaire.

– **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n - u_n \\ &= 3\times 0{,}5^n - \frac{4}{5}u_n \\ &= \frac{4}{5}\left(\frac{15}{4}\times 0{,}5^n - u_n\right) \end{aligned}$$

D'après la question 1a, cela entraîne que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. D'après 2a, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n > 0$, la suite est donc minorée. On en déduit, d'après le théorème de convergence des suites monotones, que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10\times 0,5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10\times 0{,}5^{n+1} \\ &= \frac{1}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n - 10\times 0{,}5\times 0{,}5^n \\ &= \frac{1}{5}u_n - 2\times 0{,}5^n \\ &= \frac{1}{5}\left(u_n - 10\times 0{,}5^n\right) \\ &= \frac{1}{5}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 10\times 0{,}5^0 = 2 - 10 = -8$.

b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n.$$

La suite (v_n) étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
On en déduit que $-8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 10\times 0{,}5^n$ et donc que : $u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0{,}5^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

$-1 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, de même : $-1 < 0{,}5 < 1$, donc $\lim 0{,}5^n = 0$.
On en déduit par opérations sur les limites que $\lim u_n = 0$.

Exercice 5 : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Partie A : préliminaires

1. **a.** Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N-1 \quad \text{modulo } N.$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } N$.

b. Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$.
On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1 \quad \text{modulo } 26$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $6A - A^2$.

b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

c. Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

d. Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU »(mot à coder) $\rightarrow X\begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ « YE » (mot codé).

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que : $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$.

2. En utilisant la question 1. b. de la **partie A**, établir que :

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases} \quad \text{modulo } 26$$

3. Décoder le mot « QP ».

Annexe à rendre avec la copie

Annexe relative à l'exercice 3

Courbe représentative de la fonction f_1