

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.
 Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.
 Bien indiquer les numéros des exercices

Exercice 1 :

/ 5 points

Commun à tous les candidats

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geq 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} &= \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1. Calculer d_1 et a_1 .
2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
 L'algorithme suivant est proposé :

<i>Variables :</i>	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
<i>Initialisation :</i>	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
<i>Traitement :</i>	Pour k variant de 1 à n D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$ A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$ Fin pour
<i>Sortie :</i>	Afficher D Afficher A

- a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
 Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question 1. ?
- b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.
3. a. Pour tout entier naturel n , on pose $e_n = d_n - 200$.
 Montrer que la suite (e_n) est géométrique.
 b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n .
 c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.
4. On admet que pour tout entier naturel n ,

$$a_n = 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

- a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geq (n+1)^2$.
 - b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geq n^2$.
 - c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$.
 - d. Étudier la convergence de la suite (a_n) .
-

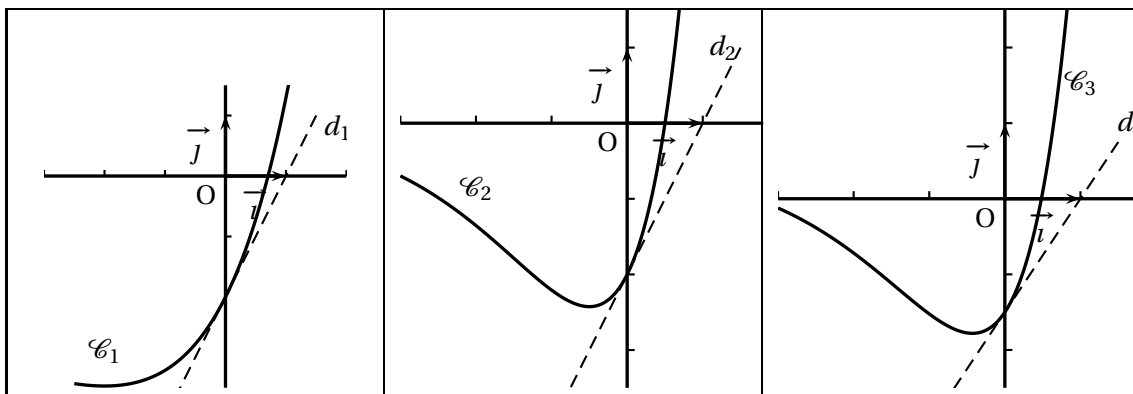
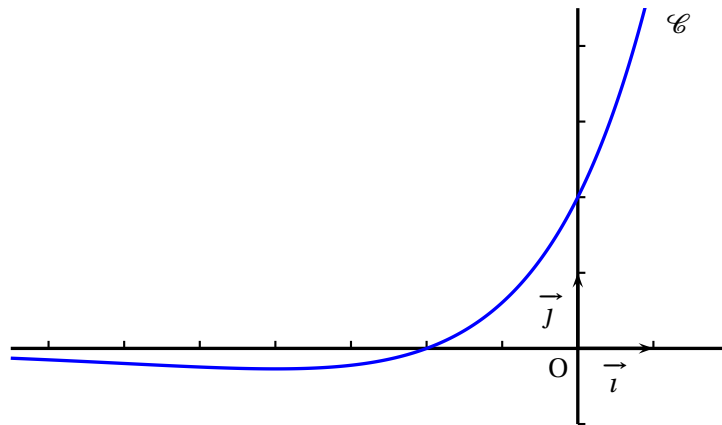
Exercice 2 :

/ 2 points

Commun à tous les candidats

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ qui représente une fonction f et trois autres courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.

On désignera dans cet exercice une primitive de la fonction f par la notation usuelle F .



1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - a. À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
 - b. L'une des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F . Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Commun à tous les candidats

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ». Une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

- Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique donné en annexe, **à rendre avec la copie**, en faisant apparaître les pointillés utiles.
Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

- Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$: $g'(x) = \frac{(e-2) - (e-1)x}{1 + (e-1)x}$;

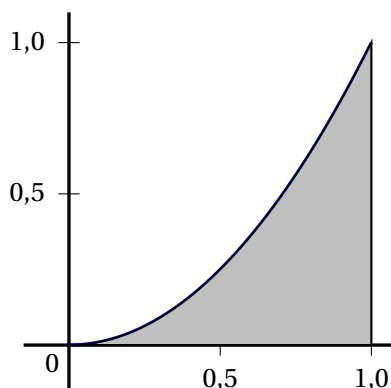
- b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.
- c. Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0; 1]$ deux solutions α et β , avec $\alpha < \beta$.
- On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de re-touche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) \leq x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathcal{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de re-touche :



$$f_1(x) = xe^{(x^2-1)} \quad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. a. Calculer $\mathcal{A}_{f_1}$.
- b. Calculer $\mathcal{A}_{f_2}$
2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

Exercice 4 :

/ 3 points

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1; 2; 5)$, $B(-1; 6; 4)$ et $C(7; -10; 8)$.

1. Les points A, B et C définissent-ils un plan ? (réponse à justifier)
2. Déterminer une équation paramétrique (de paramètre t) de la droite (AB) .
3. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation paramétrique (de paramètres u et v)

$$\begin{cases} x &= 3 + u \\ y &= 1 - v \\ z &= 5 - u \end{cases}$$

Déterminer $(AB) \cap \mathcal{P}$.

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**Partie A : Restitution organisée de connaissances**

Démontrer que si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ (réel strictement positif), alors c'est une loi sans vieillissement.

rappels :

- la densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre λ est la fonction définie par $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, sur l'intervalle $[0; +\infty[$
- X suit une loi sans vieillissement lorsque, pour tout $h > 0$ et tout $t > 0$,

$$P(X \geq t) = P_{X \geq h}(X \geq t + h)$$

Partie B

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.

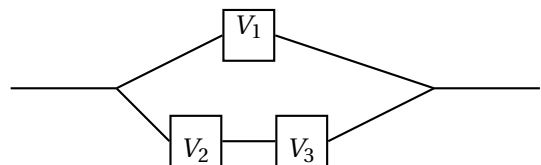
La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?
2. Calculer la probabilité, à 0,001 près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6 000 heures.

Partie C

Avec trois vannes identiques V_1 , V_2 et V_3 , on fabrique le circuit hydraulique ci-contre.

Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.

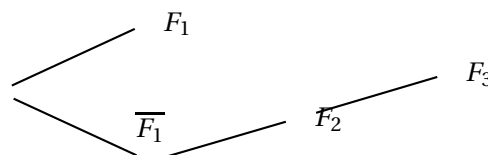


On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6 000 heures. On note :

- F_1 l'évènement : « la vanne V_1 est en état de marche après 6 000 heures ».
- F_2 l'évènement : « la vanne V_2 est en état de marche après 6 000 heures ».
- F_3 l'évènement : « la vanne V_3 est en état de marche après 6 000 heures ».
- E : l'évènement : « le circuit est en état de marche après 6 000 heures ».

On admet que les évènements F_1 , F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à 0,3.

1. L'arbre probabiliste ci-dessous représente une partie de la situation.



Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.

2. Démontrer que $P(E) = 0,363$.
3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment là. Arrondir au millièmes.

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**Partie A**

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (13 ; 3) est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.

On rappelle le petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p , alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p que l'on note $a^{p-1} \equiv 1 [p]$.

1. Soit x un entier naturel.
Démontrer que si $x \equiv a [7]$ et $x \equiv a [19]$, alors $x \equiv a [133]$.
2.
 - a. On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
Démontrer que $a^6 \equiv 1 [7]$ puis que $a^{108} \equiv 1 [7]$.
En déduire que $(a^{25})^g \equiv a [7]$.
 - b. On suppose que a est un multiple de 7.
Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a [7]$.
 - c. On admet que pour tout entier naturel a , $(a^{25})^g \equiv a [19]$.
Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a [133]$.

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leq a \leq 26$.

Un message, constitué d'entiers appartenant à A , est codé puis décodé.

La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A , l'entier r tel que $a^{25} \equiv r [133]$ avec $0 \leq r < 133$.

La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1 [133]$ avec $0 \leq r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a [133]$.
 2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.
Décoder ce message.
-

Annexe à rendre avec la copie

Annexe relative à l'exercice 3

Courbe représentative de la fonction f_1

