Proposition de corrigé

***Exercice* 1** : / 5 points

Commun à tous les candidats

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1. Calculer d_1 et a_1.

$$\left\{\begin{array}{ll} d_1 & = \frac{1}{2}d_0 + 100 = 250 \\ a_1 & = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}a_0 + 70 = 445 \end{array}\right.$$

2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n

Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	    D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$
	    A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$
	Fin pour

Sortie :	Afficher D Afficher A

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?

Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1.** ?

On obtient en sortie $D = 250$ et $A = 420$. Ces résultats ne sont pas cohérents avec ceux obtenus à la question (**1**).

b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

- Le problème de l'algorithme proposé est qu'il réutilise la variable D pour le calcul de A alors qu'elle a été modifiée. On corrige cela en utilisant une variable auxiliaire E, déclarée « nombre réel » dans l'initialisation :

Variables :	n et k sont des entiers naturels
	D, A et E sont des réels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	D prend la valeur 300
	A prend la valeur 450
	Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	E prend la valeur D
	D prend la valeur $\dfrac{D}{2}+100$
	A prend la valeur $\dfrac{A}{2}+\dfrac{E}{2}+70$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher D
	Afficher A

- On peut aussi plus simplement inverser les deux instructions d'affectation à A et à D :

Variables :	n et k sont des entiers naturels
	D, A sont des réels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	D prend la valeur 300
	A prend la valeur 450
	Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	A prend la valeur $\dfrac{A}{2}+\dfrac{D}{2}+70$
	D prend la valeur $\dfrac{D}{2}+100$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher D
	Afficher A

3. **a.** Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.

Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

Par définition, on a :

$$e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}d_n - 100 = \frac{1}{2}\left(d_n - 200\right) = \frac{1}{2}e_n$$

La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $e_0 = d_0 - 200 = 100$.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

D'après la question précédente, on a $e_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n e_0 = 100\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$$\text{D'où } e_n = d_n - 200 \iff d_n = 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200.$$

c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 200$.

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers 200.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

$2n^2 - (n+1)^2 = \left(\left(\sqrt{2}-1\right)n - 1\right)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)n + 1\right)$.

D'après les résultats de première sur les trinômes du second degré,

$2n^2 - (n+1)^2$ est donc positif pour $n \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ ou $n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \simeq 2,4$.

Donc, pour n entier supérieur à 3, on a $2n^2 - (n+1)^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$2n^2 \geqslant (n+1)^2.$$

<u>autre démonstration</u> : $2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$

Or, si $n \geqslant 3$, $n-1 \geqslant 2$ et $(n-1)^2 \geqslant 2^2 = 4$ ce qui donnera $(n-1)^2 - 2 \geqslant 2$ ce qui montre que $(n-1)^2 - 2 \geqslant 0$ et donc on obtient le résultat demandé.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,

$2^n \geqslant n^2$.

Initialisation : pour $n = 4$, on a bien $2^4 = 16 \geqslant 4^2 = 16$ donc la propriété est initialisée.

Hérédité : supposons que pour tout entier $k > 4$, $2^k \geqslant k^2$.

En multipliant les deux membres de l'inéquation par 2 et en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$2^{k+1} \geqslant 2k^2 \geqslant (k+1)^2.$$

La propriété est donc héréditaire.

Initialisée et héréditaire, la propriété $2^n \geqslant n^2$ est donc vraie pour tout entier supérieur ou égal à 4 d'après le principe de récurrence.

c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,

$0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100}{n}$.

D'après la question précédente, si n est un entier supérieur ou égal à 4, on $0 < n^2 \leqslant 2^n$. En composant, cette inégalité par la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et en multipliant par 100, on obtient alors :

$$0 < \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2} \implies 0 < 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100n}{n^2} = \frac{100}{n}$$

d. Étudier la convergence de la suite (a_n).

D'après la question précédente et les théorèmes d'encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{100}{n} = 0$ et d'après les résultats sur les limites des suites géométriques de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

D'après les résultats sur les limites de sommes, on obtient alors :

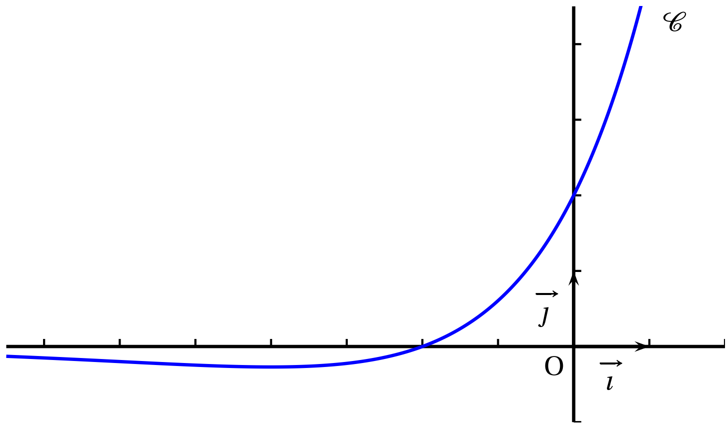
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 340.$$

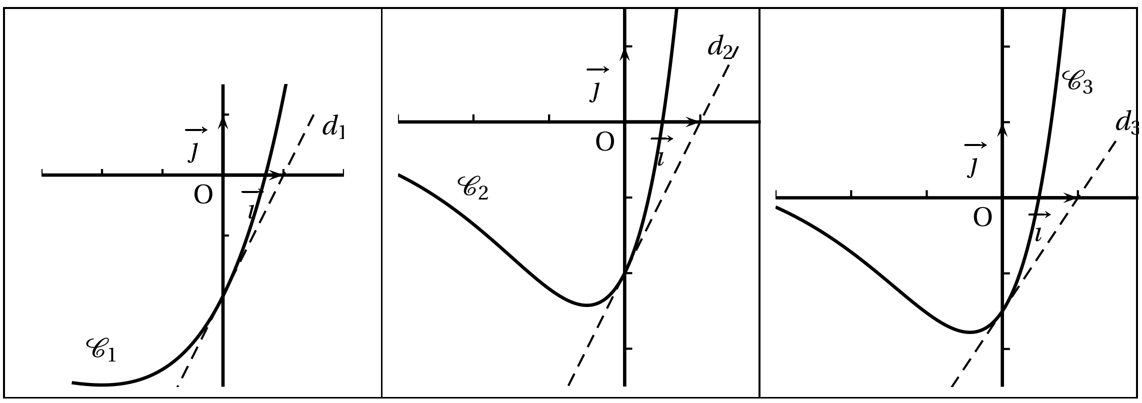
***Exercice* 2** : / 2 points

Commun à tous les candidats

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ qui représente une fonction f et trois autres courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.

On désignera dans cet exercice une primitive de la fonction f par la notation usuelle F.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
   Sur $]-\infty\,;\,-2]$, $f(x) \leqslant 0$ et sur $[2\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   a. À l'aide de la courbe $\mathscr{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
   $F'(0) = f(0) = 2$ et $F'(-2) = f(-2) = 0$
   b. L'une des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.
   Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

– On élimine $\mathscr{C}_3$: en effet, le coefficient directeur de la tangente en 0 est égal à 1,5 ; or, $F'(0) = f(0) = 2$ ce qui signifie que le coefficient directeur de la tangente en 0 doit être égal à 2. (ce qui est le cas sur les deux autres courbes).

– On élimine $\mathscr{C}_2$: en effet, $f(x) \geqslant 0$ sur $[2\,;\,+\infty[$, ce qui signifie qu'une primitive de f est croissante sur cet intervalle. Or ce n'est pas le cas de la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_2$.

Conclusion : on conserve la courbe $\mathscr{C}_1$ qui est cohérente avec les informations données : coefficient directeur de la tangente en 0 égal à 2 et sens de variation.

***Exercice* 3** : / 5 points

Commun à tous les candidats

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

a. Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

- $f_1(0) = 0$: évident ;
- $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$;

- f_1 fonction polynôme est dérivable sur $[0\,;\,1]$ donc continue sur cet intervalle ;
- $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3\left(4x^2 - 4x + 1\right) = 3(2x-1)^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,1]$.

f_1 est donc bien une fonction de retouche.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, **à rendre avec la copie**, en faisant apparaître les pointillés utiles.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

Il semble que la courbe coupe la droite d'équation $y = x$ pour $x = 0,5$.

On peut vérifier que $f_1(0,5) = 0,5$.

On a donc $f_1(x) \leqslant x \iff x \geqslant 0,5$.

Ce résultat signifie que f_1 éclaircie les nuances codées par un nombre inférieur à 0,5 et inversement pour celles codées par un réel entre 0,5 et 1.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (\mathrm{e} - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a. Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$: $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}-2) - (\mathrm{e}-1)x}{1 + (\mathrm{e}-1)x}$;

f_2 est une fonction dérivable car composée de fonctions dérivables, donc g l'est aussi et :

$g'(x) = f_2'(x) - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{1+(\mathrm{e}-1)x} - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1-1-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x} = \dfrac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}$.

b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Comme $\mathrm{e} > 1$, le dénominateur est positif comme somme de termes positifs ; le signe de $g'(x)$ est donc celui de son numérateur ; or

$\mathrm{e} - 2 - (\mathrm{e}-1)x \geqslant 0 \iff \mathrm{e} - 2 \geqslant (\mathrm{e}-1)x \iff \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \geqslant x$

On a $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \approx 0,418$.

On a donc avec $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} = a$,

$g'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant a$ et de même

$g'(x) \leqslant 0 \iff x \geqslant a$.

La fonction g est donc croissante sur $[0\,;a]$, puis décroissante sur $[a\,;\,1]$.

g a donc un maximum $g(a) \approx 0,12$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0, 12.

c. Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

D'après la question précédente sur l'intervalle $[0\,;\,a]$ la fonction g est continue et croissante de $g(0) = 0$ à $g(a) \approx 0,12$.

Comme $0,05 \in [0\,;\,a]$, il existe une valeur unique α de $[0\,;\,a]$ telle que $f(\alpha) = 0,05$.

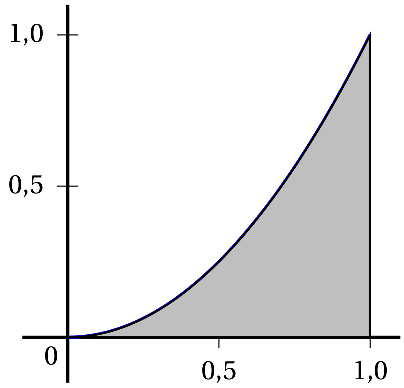
On démontre de même (avec g décroissante) que sur $[a\,;\,1]$ il existe un réel unique β tel que $g(\beta) = 0,05$.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $f(x) \leqslant x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathcal{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :



$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{(x^2-1)} \qquad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. **a.** Calculer $\mathcal{A}_{f_1}$.

f_1 produit de fonctions positives sur $[0\,;1]$ est positive sur cet intervalle. On a donc :

$\mathcal{A}_{f_1} = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{(x^2-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{(x^2-1)}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right).$

b. Calculer $\mathcal{A}_{f_2}$

On a $f_2(0) = -15 + 15 = 0$ et comme il est admis qu'elle est une fonction de retouche elle est croissante sur $[0\,;1]$, donc positive sur cet intervalle. On a donc :

$\mathcal{A}_{f_2} = \displaystyle\int_0^1 \left(4x - 15 + \frac{60}{x+4}\right)\mathrm{d}x = \left[2x^2 - 15x + 60\ln(x+4)\right]_0^1 =$
$2 - 15 + 60\ln 5 - 60\ln 4 = -13 + 60\ln\frac{5}{4}.$

2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

On a $\mathcal{A}_{f_1} = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0,316$ et $\mathcal{A}_{f_2} = -13 + 60\ln\frac{5}{4} \approx 0,389$.

C'est la fonction f_1 qui éclaircit le plus l'image.

***Exercice* 4** : / 3 points

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $\mathrm{A}(1\,;2\,;5)$, $\mathrm{B}(-1\,;6\,;4)$ et $\mathrm{C}(7\,;-10\,;8)$.

1. Les points A, B et C définissent-ils un plan ? (réponse à justifier)

On va étudier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en déterminant leurs coordonnées :

$\overrightarrow{AB} = (-2\,;4\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC} = (6\,;-12\,;3)$; on a donc : $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$

Les vecteurs étant colinéaires, les points **A, B et C sont alignés et ne définissent donc pas de plan**.

2. Déterminer une équation paramétrique (de paramètre t) de la droite (AB).

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires $\iff$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$

$$\iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-5 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-1 & = & -2t \\ y-2 & = & 4t \\ z-5 & = & -t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-2t \\ y & = & 2+4t \\ z & = & 5-t \end{array}\right.$$

(AB) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-2t \\ y & = & 2+4t \\ z & = & 5-t \end{array}\right.$

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation paramétrique (de paramètres u et v)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+u \\ y & = & 1-v \\ z & = & 5-u \end{array}\right.$$

Déterminer $(AB) \cap \mathscr{P}$.

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (AB) \cap \mathscr{P} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-2t \\ y & = & 2+4t \\ z & = & 5-t \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+u \\ y & = & 1-v \\ z & = & 5-u \end{array}\right.$

On résout $\left\{\begin{array}{lcl} 1-2t & = & 3+u \\ 2+4t & = & 1-v \\ 5-t & = & 5-u \end{array}\right.$

La dernière ligne donne : $t = u$ et en remplaçant u par t dans la première ligne, on obtient : $t = -\dfrac{2}{3}$

Ensuite, en remplaçant t par sa valeur dans l'équation paramétrique de la droite (AB), on obtient : $x = \dfrac{7}{3}$, $y = -\dfrac{2}{3}$ et $z = \dfrac{17}{3}$

Conclusion : la droite (AB) et le plan $\mathscr{P}$ se coupent au point M de coordonnées $\left(\dfrac{7}{3}\ ;\ -\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{17}{3}\right)$

***Exercice* 5** : /5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : **Restitution organisée de connaissances**

Démontrer que si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ (réel strictement positif), alors c'est une loi sans vieillissement.

rappels :

- la densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre λ est la fonction définie par $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$
- X suit une loi sans vieillissement lorsque, pour tout $h > 0$ et tout $t > 0$,

$$P(X \geqslant t) = P_{X \geqslant h}(X \geqslant t+h)$$

d'une part : $P(X \geqslant t) = 1 - \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot u}\, du = 1 - (e^{-\lambda \cdot t} + 1) = e^{-\lambda \cdot t}$

d'autre part : $P_{X \geqslant h}(X \geqslant t+h) = \dfrac{P\big((X \geqslant h) \cap (X \geqslant t+h)\big)}{X \geqslant h} = \dfrac{P(X \geqslant t+h)}{X \geqslant h} = \dfrac{e^{-\lambda \cdot (t+h)}}{e^{-\lambda \cdot h}} = e^{-\lambda \cdot t}$

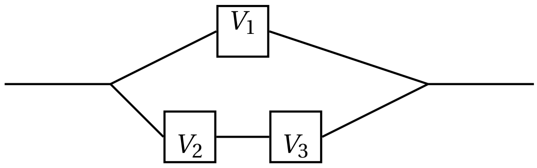
Partie B

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.
La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?
   $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,0002} = 5\,000$ heures
2. Calculer la probabilité, à $0,001$ près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6 000 heures.
   $P(X \geqslant 6000) = e^{-0,0002\times 6000} = e^{-1,2} \approx 0,307$

Partie C

Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre.
Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.

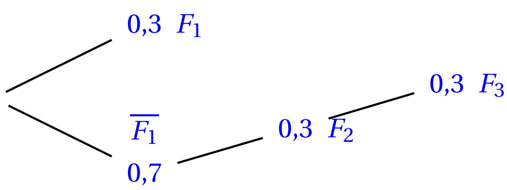


On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6 000 heures. On note :

- F_1 l'évènement : « la vanne V_1 est en état de marche après 6 000 heures ».
- F_2 l'évènement : « la vanne V_2 est en état de marche après 6 000 heures ».
- F_3 l'évènement : « la vanne V_3 est en état de marche après 6 000 heures ».
- E : l'évènement : « le circuit est en état de marche après 6 000 heures ».

On admet que les évènements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à $0,3$.

1. L'arbre probabiliste ci-dessous représente une partie de la situation.



   Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.
2. Démontrer que $P(E) = 0,363$.
   $P(E) = P(F_1 \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3)) = P(F_1) + P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) = P(F_1) + P(\overline{F_1}) \times P(F_2) \times P(F_3)$

   Cette dernière égalité vient du fait que les événements sont considérés comme indépendants deux à deux.

   Ainsi, $P(E) = 0,3 + 0,7 \times 0,3 \times 0,3 = 0,363$
3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment là. Arrondir au millième.
   On veut calculer $P_E(F_1)$

   $P_E(F_1) = \dfrac{P(F_1 \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(F_1)}{P(E)} = \dfrac{0,3}{0,363} \approx 0,826$

***Exercice* 6** : /5 points

Pour les candidats <u>ayant suivi</u> l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (13 ; 3) est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.
On rappelle le petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p que l'on note $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

1. Soit x un entier naturel.
   Démontrer que si $x \equiv a\ [7]$ et $x \equiv a\ [19]$, alors $x \equiv a\ [133]$.
2. **a.** On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
   Démontrer que $a^6 \equiv 1\ [7]$ puis que $a^{108} \equiv 1\ [7]$.
   En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

   b. On suppose que a est un multiple de 7.
   Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

   c. On admet que pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [19]$.
   Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [133]$.

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leqslant a \leqslant 26$.
Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.
La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r\ [133]$ avec $0 \leqslant r < 133$.
La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1\ [133]$ avec $0 \leqslant r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a\ [133]$.
2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.
   Décoder ce message.

Annexe à rendre avec la copie

Annexe relative à l'exercice 3

Courbe représentative de la fonction f_1