

durée : 4 h**calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

Exercice 1 :

/2 points

Commun à tous les candidats**Restitution organisée de connaissances**

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et soit P un plan.

On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite D_1 de vecteur directeur $\vec{u}_1$ et la droite D_2 de vecteur directeur $\vec{u}_2$.

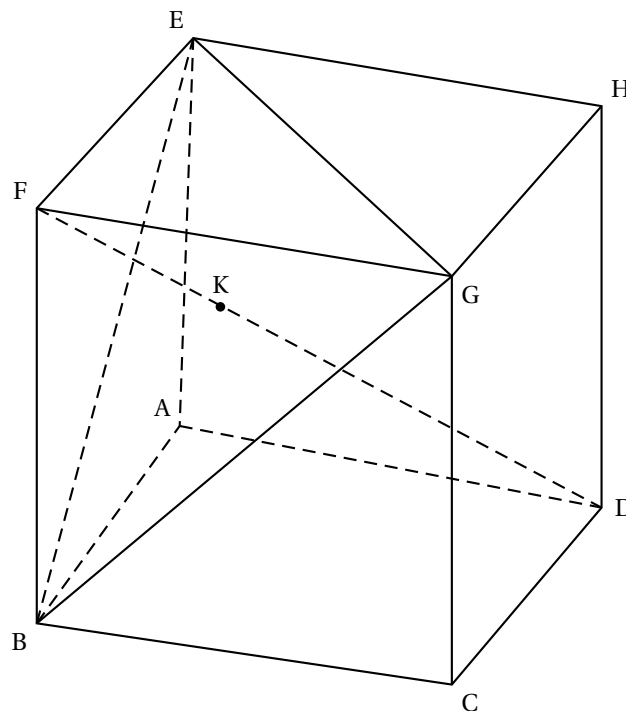
Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et à D_2 .

Exercice 2 :

/4 points

Commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).
3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées $K(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$.
4. Quelle est la nature du triangle BEG? Déterminer son aire.
5. En déduire le volume du tétraèdre BEGD.

Exercice 3 :

/4 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n .
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Afficher v Fin algorithme	Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Fin algorithme	Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Afficher v Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714
---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.
 - b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$. La suite (v_n) est-elle monotone ?
 - c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.
 - d. Déterminer la valeur de cette limite.

Exercice 4 :

/2 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

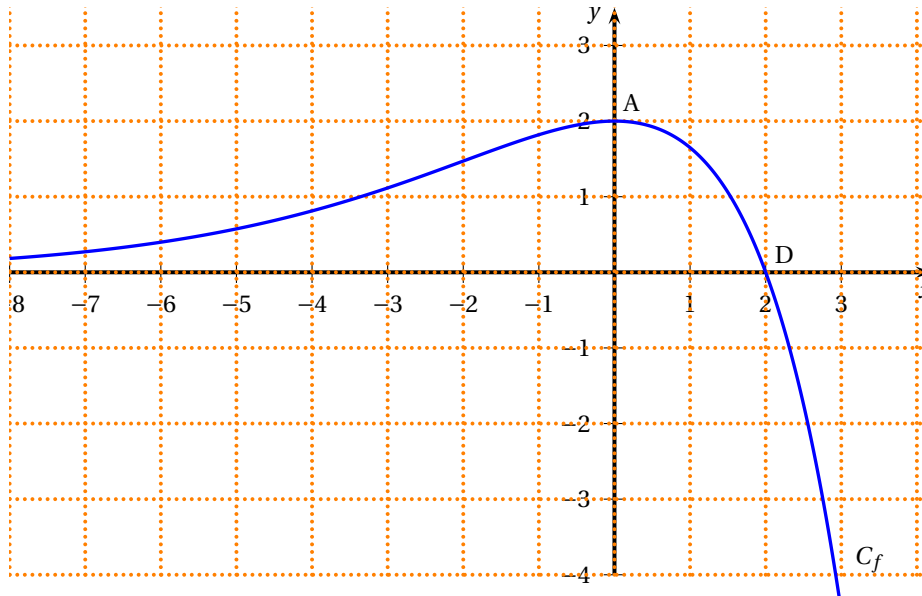


Figure 1

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)e^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.

On sait que :

- Les points $A(0; 2)$ et $D(2; 0)$ appartiennent à la courbe C_f .
- La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f , définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
 2. Exprimer $f'(x)$ à l'aide des paramètres a et b .
 3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les valeurs de a et b et donner l'expression de $f(x)$.
-

Exercice 5 :

/3 points

Commun à tous les candidats

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux. L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les évènements suivants :

C : « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;

V : « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;

J : « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;

H : « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;

S : « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».

On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?
 2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.
 - a. Les évènements C et H sont-ils indépendants ?
 - b. Calculer $P_J(H)$.
-

Exercice 6 :

/5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Proposition :** Pour tout entier naturel n : $(1 + i)^{4n} = (-4)^n$.
 2. Soit (E) l'équation $(z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
 3. **Proposition :** Pour tout nombre réel α , $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha} \cos(\alpha)$.
 4. Soit A le point d'affixe $z_A = \frac{1}{2}(1 + i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Proposition : si $n - 1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
 5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.
Proposition : $1 + j + j^2 = 0$.
-

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E)
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ (F).

1. On suppose $m \leq 4$.
Par disjonction de cas, montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geq 5$.
 - a. Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors
$$7^n \equiv 1 \pmod{32}.$$
 - b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
 - c. En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors
$$7^n \equiv 1 \pmod{5}.$$
 - d. Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).