

durée : 4 h**calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

Exercice 1 :

/ 5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x e^{-x}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Partie B

Soit \mathcal{A} la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $\mathcal{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction \mathcal{A} .
 2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe \mathcal{C} et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction \mathcal{A} ?
 3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x = \alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} , en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.
 - a. Démontrer que l'équation $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$
 - b. Sur le graphique fourni en **annexe (à rendre avec la copie)** sont tracées la courbe \mathcal{C} , ainsi que la courbe Γ représentant la fonction \mathcal{A} .
Sur le graphique de l'**annexe**, identifier les courbes \mathcal{C} et Γ , puis tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. En déduire une valeur approchée du réel α . Hachurer le domaine correspondant à $\mathcal{A}(\alpha)$.
 4. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = (x+1)e^{-x}$.
 - a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.
 - b. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, une expression de $\mathcal{A}(t)$.
 - c. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathcal{A}(6)$.
-

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

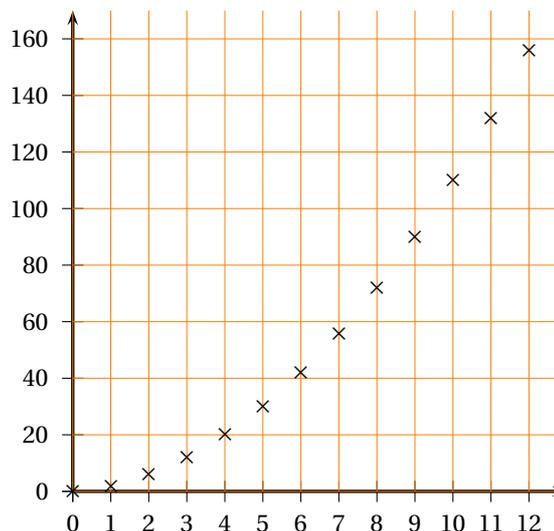
1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme 2
Variables : n est un entier naturel u est un réel	Variables : n est un entier naturel u est un réel
Entrée : Saisir la valeur de n	Entrée : Saisir la valeur de n
Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$: u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie : Afficher u	Sortie : Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n , la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



- a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.
- b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n , $u_n = an^2 + bn + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.
4. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
 - a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
 - b. On définit, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = (n + 1)(n + 2)$.
 - c. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 3 :

/ 3 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes. Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fautive ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1

Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.

Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

- a. 0,750 b. 0,150 c. 0,462 d. 0,700

Question 2

Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.

La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

- a. 0,900 b. 0,092 c. 0,002 d. 0,267

Question 3

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \frac{1}{8}$.

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

- a. 0,750 b. 0,250 c. 0,472 d. 0,528
-

Exercice 4 :

/ 2 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fautive en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1 ; 2 ; 5), B(-1 ; 6 ; 4) et C(7 ; -10 ; 8).

1. Proposition 1 : Les points A, B et C définissent un plan.

2. Proposition 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \\ z = -\frac{3}{2}t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice comporte trois parties qui peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Dans tout l'exercice, on désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z .

Partie A : restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe \bar{z} défini par $\bar{z} = x - iy$.

Démontrer que :

1. Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
2. Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n , $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Partie B

1. En utilisant les résultats de la partie A, montrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué \bar{z} est également une solution de (E).
2. En remarquant que si z est une solution de l'équation (E), alors $-z$ l'est aussi, montrer que si on a trouvé une solution de l'équation (E), on en a trouvé quatre.
3. Justifier le fait que l'équation (E) admette au maximum quatre solutions.

remarque: on pourra raisonner par l'absurde en supposant que (E) admette cinq racines et donner alors une écriture factorisée de $z^4 + 4z^2 + 16$ afin de mettre en évidence une contradiction.

Partie C : résolution de (E)

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
Écrire les solutions de cette équation sous une forme algébrique et sous forme exponentielle.
 2. Montrer que si $a = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors a^2 est une des deux solutions trouvées à la question précédente.
 3. En déduire les quatre solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E) (données au choix, sous forme exponentielle ou algébrique).
-

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que :
 $N = 1 + 2 + \dots + n$.

Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.

Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.

On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.
2. **a.** Montrer que le nombre $1 + 2 + \dots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2 + n - 2p^2 = 0$.
b. En déduire que le nombre $1 + 2 + \dots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n + 1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne

$$x^2 - 8y^2 = 1,$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).
2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x ; y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y .
2. Déterminer la matrice A^{-1} , puis exprimer x et y en fonction de x' et y' .
3. Démontrer que $(x ; y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x' ; y')$ est solution de (E).
4. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,
 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n .
 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , le couple $(x_n ; y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2015 qui est le carré d'un entier.

Annexe 1
À rendre avec la copie

EXERCICE 1
Représentations graphiques des fonctions f et \mathcal{A}

