Diplôme National du Brevet

Épreuve blanche

Proposition de corrigé

Externat Notre Dame

Vendredi 9 décembre 2011

durée de l'épreuve : 2 h

I - Activités numériques	12 points
II - Activités géométriques	12 points
III – Problème	12 points
Qualité de rédaction et de présentation	4 points

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est indiquée

L'ANNEXE 1 sera à rendre avec votre copie (ne pas oublier d'y inscrire votre nom)

Activités Numériques

Exercice 1

On donne le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre a) Ajouter 1 à ce nombre b) Multiplier le résultat par le double du nombre choisi c) Écrire le résultat

***remarque :** si vous voulez faire des essais pour voir comment fonctionne ce programme de calcul, faites le au brouillon sans l'écrire sur votre copie.*

1) Montrez que, si on choisit le nombre 10, le résultat obtenu est 220.

étape a) $10+1=11$

étape b) $11\times(2\times10)=11\times20$

étape c) 220

2) Calculez la valeur exacte du résultat obtenu lorsque :

a) le nombre choisi est -5 ;

étape a) $-5+1=-4$

étape b) $-4\times2\times(-5)=-4\times(-10)$

étape c) 40

b) le nombre choisi est $\frac{2}{3}$;

étape a) $\frac{2}{3}+1=\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=\frac{5}{3}$

étape b) $\frac{5}{3}\times2\times\frac{2}{3}=\frac{5}{3}\times\frac{4}{3}$

étape c) $\frac{20}{9}$

c) * pour les élèves de 3^e1, 3^e2 et 3^e4 : le nombre choisi est 10^{-3}

* pour les élèves de 3^e3 : le nombre choisi est $\sqrt{5}$

étape a) $\sqrt{5}+1$

étape b) $(\sqrt{5}+1)\times2\sqrt{5}=2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}+2\sqrt{5}$

étape c) $10+2\sqrt{5}$

3) Quels nombres peut-on choisir pour que le résultat obtenu soit 4 ?

On peut faire des essais.

On trouve que si le nombre de départ est 1, on obtient 4 au final.

De même, si on prend -2 au départ, on obtient 4 au final.

Exercice 2

Trois points *A*, *B* et *C* d'une droite graduée ont respectivement pour abscisse :

$$\frac{1}{4} \; ; \; \frac{1}{3} \text{ et } \frac{5}{12}$$

Ces trois points sont-ils régulièrement espacés sur la droite graduée ? (à justifier)

On peut mettre ces trois fractions au même dénominateur, à savoir 12 :

$\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$

$\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$

On constate alors qu'il y a un douzième d'écart entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$, et qu'il y a également un douzième d'écart entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{12}$.

Les points *A*, *B* et *C* sont donc régulièrement espacés.

Exercice 3

Une boîte dont la forme est un parallélépipède rectangle de dimensions 60 cm, 36 cm et 24 cm est remplie par des cubes dont l'arête mesure un nombre entier de centimètres.

a) Quel peut être l'arête des cubes ?

On peut regarder ce qui se passe le long de l'arête qui mesure 60 cm : pour pouvoir placer un nombre entier de petits cubes sur cette dimension, il faut que l'arête du cube soit un diviseur de 60.

Sinon, il restera « un vide » au bout du parallélépipède rectangle.

Les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60.

En faisant le même raisonnement pour les autres dimensions, on montre que l'arête du cube recherché doit aussi être un diviseur de 36 et de 24.

Les diviseurs de 36 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.

Ceux de 24 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

L'arête du cube doit être un diviseur commun à 60, 24 et 36.

Elle peut être égale à : 1, 2, 3, 4, 6 ou 12 (l'unité est le centimètre).

b) Quel est, dans chacun des cas, le nombre de cubes contenus dans la boite ?

Arête de 1 cm : 60 cubes sur la longueur, 36 sur la profondeur et 24 sur la hauteur.
Cela donne : $60\times36\times24=51\,840$ cubes.

Arête de 2 cm : 30 cubes sur la longueur, 18 sur la profondeur et 12 sur la hauteur.
Cela donne : $30\times18\times12=6480$ cubes.

Arête de 3 cm : 20 cubes sur la longueur, 12 sur la profondeur et 8 sur la hauteur.
Cela donne : $20\times12\times8=1920$ cubes.

Arête de 4 cm : 15 cubes sur la longueur, 9 sur la profondeur et 6 sur la hauteur.
Cela donne : $15\times9\times6=810$ cubes.

Arête de 6 cm : 10 cubes sur la longueur, 6 sur la profondeur et 4 sur la hauteur.
Cela donne : $10\times6\times4=240$ cubes.

Arête de 12 cm : 5 cubes sur la longueur, 3 sur la profondeur et 2 sur la hauteur.
Cela donne : $5\times3\times2=30$ cubes.

Activités géométriques

Exercice 1

Partie I

1) Effectuez sur votre copie le programme de construction suivant :

- construire un segment [AB] de 10 cm ;
- construire le cercle de diamètre [AB] ; le noter $\mathscr{C}$;
- placer un point C, situé sur le cercle $\mathscr{C}$, à 6 cm du point A.

2) Le triangle ABC est-il rectangle ? (à justifier)

Le triangle ABC est inscrit dans un cercle et a un côté qui est le diamètre du cercle : il est rectangle.

3) Calculez l'aire du triangle ABC ?

On a envie d'utiliser la formule $Aire=\frac{base\times hauteur}{2}$ Si on choisit la base de 10 cm, on ne connaît pas la hauteur associée.

On va prendre comme base le côté [AC], segment qui mesure 6 cm.

On a alors besoin de la longueur du côté [BC] ; pour cela, on peut utiliser le théorème de Pythagore pour la déterminer, étant donné qu'on sait que le triangle est rectangle.

Cela donne :

$$BC^2=AB^2-AC^2=10^2-3^2=100-36=64$$

et donc : $BC=\sqrt{64}=8$ cm

Ainsi : $Aire=\frac{base\times hauteur}{2}=\frac{8\times 6}{2}=4\times 6=24$ cm²

L'aire du triangle est égale à 24 cm² (et c'est une valeur exacte).

Partie II

EFG est un triangle tel que : EF = 16 cm ; EG = 14 cm ; FG = 8 cm.

1) Tracez en vraie grandeur le triangle EFG.

2) Le triangle EFG est-il rectangle ? (à justifier)

Si le triangle était rectangle, il le serait en G (car [EF] est le plus grand côté).

On aurait alors (d'après le théorème de Pythagore) : $EG^2+FG^2=EF^2$

or, $EG^2+FG^2=14^2+8^2=196+64=260$ et $EF^2=16^2=256$

Comme $EG^2+FG^2\neq EF^2$, on conclut que ce triangle n'est pas rectangle.

3) Le mathématicien Héron d'Alexandrie (1^{er} siècle) a trouvé une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle : en notant *a*, *b* et *c* les longueurs des trois côtés et *p* son périmètre, l'aire *A* du triangle est donnée par la formule :

$$A=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$$

Calculez à l'aide de cette formule l'aire du triangle *EFG*.

Donnez le résultat arrondi au cm² près.

On calcule tout d'abord le périmètre :

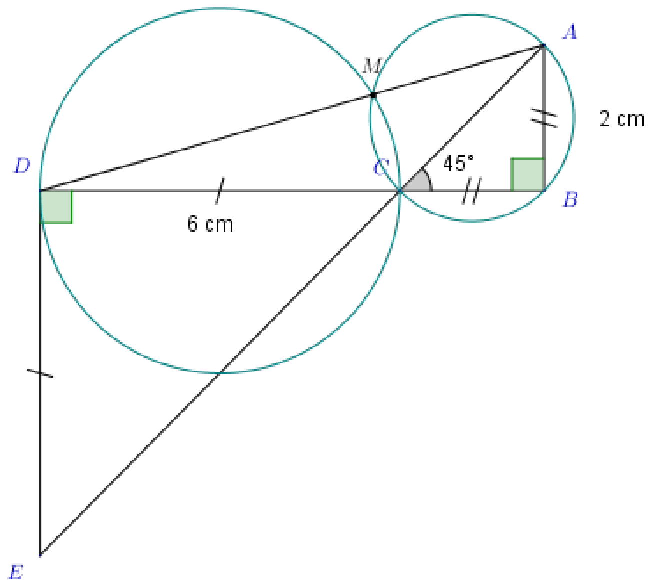
$p=16+14+8=38\quad\text{cm}$

On remplace les lettres de la formules par les valeurs qui correspondent :

$$A=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}=\sqrt{19\times(19-16)\times(19-14)\times(19-8)}=\sqrt{19\times3\times5\times11}=\sqrt{3135}\approx56$$

Ce triangle a une aire environ égale à 56 cm².

Exercice 2



Le dessin ci-contre représente une figure géométrique dans laquelle on sait que :

- *ABC* est un triangle rectangle en *B* ;
- *CED* est un triangle rectangle en *D* ;
- les points *A*, *C* et *E* sont alignés ;
- les points *B*, *C* et *D* sont alignés ;
- *AB* = *BC* = 2 cm ;
- *CD* = 6 cm.

Le dessin n'est pas en vraie grandeur.

1. Représentez sur la copie une figure en vraie grandeur.
2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$?

Le triangle *ABC* est rectangle en *B*.

De plus, il est isocèle en *B*, ce qui veut dire que les angles à la base ont la même mesure.

Ainsi, $\widehat{BCA}=\widehat{CAB}=(180-90)\div 2=45$

3. Quelle est la valeur de *DE* ? (à justifier)

L'angle $\widehat{DCB}$ est opposé par le sommet à l'angle $\widehat{DCB}$: ils ont la même mesure.

On peut alors déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CED}$.

On trouve : $\widehat{CED}=180-(90+45)=45$

Cela prouve que le triangle *CED* est isocèle en *D*, et donc que *ED* = *DC* = 6 cm

4. Tracez le cercle de diamètre [*DC*] : on le note $\mathcal{C}_1$; tracez le cercle de diamètre [*AC*] : on le note $\mathcal{C}_2$.

5. Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en deux points : le point C et un autre point noté M. Les points D, M et A sont-ils alignés ?

Si le travail n'est pas terminé, laissez tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

Oui , ils sont alignés. Voici une explication :
le triangle DMC est inscrit dans un cercle ; un de ses côtés est le diamètre du cercle ; il est rectangle en M.
De la même manière, le triangle ACM est rectangle en M.
Ainsi, l'angle $\widehat{DMA}$ est plat, puisqu'on peut le voir comme la somme des angles $\widehat{DMC}$ et $\widehat{CMA}$, tous deux égaux à 90°.
Dire que l'angle $\widehat{DMA}$ est plat revient à dire que les points D, M et A sont alignés.

Problème

Le directeur d'un théâtre sait qu'il reçoit environ 500 spectateurs quand le prix d'une place est de 20€. Il a constaté que chaque réduction de 1 euro du prix d'une place attire 50 spectateurs de plus.

Toutes les parties sont indépendantes.

Partie I

1. Complétez le tableau 1 (en ANNEXE 1)

2. On appelle x le montant de la réduction (en €).
Complétez le tableau 2 (en ANNEXE 1)

Partie II

Le directeur de la salle souhaite déterminer le prix d'une place lui assurant la meilleure recette. Il représente dans un repère la recette (exprimée en €) qu'il note $\boldsymbol{R}$ en fonction du montant x de la réduction (exprimée en €).

La courbe représentant la recette en fonction du nombre de places est donnée par la figure 1 dans l'ANNEXE 1.

Par lecture graphique, répondez aux questions ci-dessous (on attend des valeurs approchées avec la précision permise par le graphique et on fera apparaître sur le graphique les tracés nécessaires à la lecture) :

1. Quelle est la recette pour une réduction de 2 € ?

La recette est environ égale à 10 800 €.

2. Quel est le montant de la réduction pour une recette de 4 050 € ?
Quel est alors le prix d'une place ?

La réduction est environ égale à 17 €.
La place serait alors de 3 €.

3. Quelles sont les coordonnées du point M ? Interprétez les coordonnées de ce point pour le problème.

Ce point a pour coordonnées (14 ; 7 200).
Cela signifie que pour une réduction de 14 €, on peut espérer une recette d'environ 7 200 €.

4. Quelle est la recette maximale ?

Quel est alors le prix de la place ?

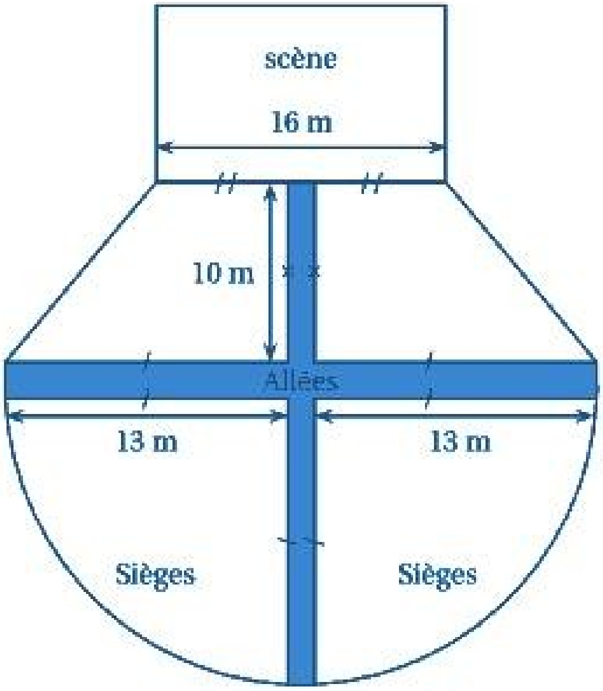
La recette maximale est environ égale à 11 200 €.

Elle correspond à une réduction de 5 €, c'est à dire à un prix de vente de 15 €.

Partie III

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

La salle de spectacle a la forme ci-dessous:



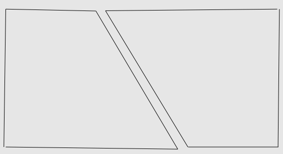
Les sièges sont disposés dans quatre zones : deux quarts de disques et deux trapèzes, séparées par des allées ayant une largeur de 2 m.

On peut placer en moyenne 1,8 sièges par m^2 dans la zone des sièges.

Calculer le nombre de places disponibles dans ce théâtre.

On peut rassembler les deux quarts de disque pour former un demi disque :
l'aire de ce demi disque est égal à : $\pi \times 13^2 \div 2 \approx 265$ m²

Si on rassemble les deux trapèzes, « dans un sens et dans l'autre », on forme un rectangle qui a pour longueur 20 m sur 10 m de hauteur. Cela donne une aire de 200 m².



13 m (16-2) : 2 = 7 m

Au total, cela donne une aire d'environ 465 m².

Pour chaque m², on peut mettre 1,8 siège.
Comme il y a 465 m², on peut mettre environ $465 \times 1{,}8 \approx 837$ sièges

Nom / Prénom :

ANNEXE 1 : à rendre avec la copie

Tableau 1

Réduction (en €)	Prix de la place (en €)	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle (en €)
0	20	500	$20\times500=10\,000$
1	19	**550**	$19\times550=10\,450$
2	**18**	600	$18\times600=10\,800$
4	16	**700**	$16\times700=11\,200$

Tableau 2

Réduction (en €)	Prix de la place (en €)	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle (en €)
x	$20-x$	$500+50\times x$	$(20-x)\times(500+50x)$

Figure 1