durée : 4 h **calculatrice autorisée**

Proposition de corrigé

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

Exercice 1 : /2 points

Commun à tous les candidats

Restitution organisée de connaissances

On vous rappelle le théorème suivant (dit « théorème de minoration ») :

Soient deux suites u et v et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

En utilisant au besoin ce théorème, vous démontrerez qu'une suite géométrique de raison $q > 1$ diverge vers $+\infty$

Voir le cours (chapitre 1)

Exercice 2 : /5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Émettre une conjecture sur le signe de f ; expliquer votre démarche.

   On peut conjecturer, en utilisant une représentation graphique, que $f \geqslant 0$.

2. Démontrer votre conjecture.

   On peut étudier rapidement cette fonction en dérivant f : $f'(x) = e^x - 1$; et donc f' est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$; elle présente un minimum en 0 égal à $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$: la conjecture est démontrée.

3. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2) \quad \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$

   On utilise le résultat précédent avec $x = \frac{1}{n}$: $e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1 \geqslant 0 \iff e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n}$

   De même avec $x = -\frac{1}{n+1}$: $e^{-\frac{1}{n+1}} - \left(-\frac{1}{n+1}\right) - 1 \geqslant 0 \iff e^{-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$

4. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

On utilise l'égalité (1) et on utilise la fonction $x \to x^n$ qui est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ pour obtenir l'inégalité voulue en remarquant que $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = e$

5. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

On utilise l'égalité (2) et on utilise la fonction $x \to x^{n+1}$ qui est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$; on obtient :

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}}\right)^{n+1} \geqslant \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\mathrm{e}^{-1} \geqslant \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\mathrm{e} \leqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \text{ (par inverse)}$$

$$\mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

6. Déduire des questions précédentes un encadrement de

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

puis sa limite en $+\infty$.

On a donc (question 4) :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

D'après la question 5 :

$$\mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{\mathrm{e}}{1+\frac{1}{n}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\frac{n\mathrm{e}}{n+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Ainsi,

$$\frac{n\mathrm{e}}{n+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

Comme $\dfrac{n\mathrm{e}}{n+1}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$, on conclut par le théorème d'encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

***Exercice* 3** : /6 points

Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
   - l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ; $c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ; $e :=$ rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

   a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
   $L_1 = \{2 ; 11 ; 44 ; 2 ; 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
   $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

   L_1 et L_3 n'ont pu être obtenus avec cet algorithme puisqu'ils contiennent des éléments identiques. Les deux autres oui.

   b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

   Cet algorithme permet chaque jour de tirer au sort 5 coureurs pour subir un contrôle antidopage.

2. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0, 1.

   La probabilité pour qu'un coureur choisi au hasard subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à $\dfrac{5}{50} = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

3. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

Les tirages de groupes de 5 sont chaque jour indépendants les uns des autres et la probabilité d'être choisi pour un des 50 coureurs est égale à 0,1 : la loi X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.

b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :

– il a été contrôlé 5 fois exactement ;

On a $p(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,1^5 \times (1 - 0,1)^{10-5} = 252 \times 0,1^5 \times 0,9^5 \approx 0,001\,48$ soit environ 0,001 5

– il n'a pas été contrôlé ;

$p(X = 0) = 0,1^0 \times 0,9^{10} \approx 0,348\,7$.

– il a été contrôlé au moins une fois.

On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,9^{10} \approx 0,651\,3$.

Partie B

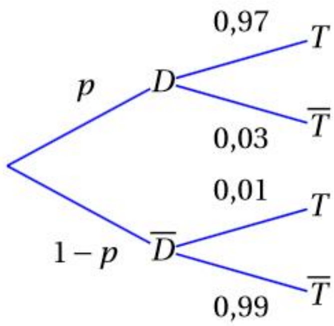
Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.
On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».
Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

– si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
– si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer $P(D)$.

En notant $p(D) = p$, on peut construire l'arbre suivant :



D'après la loi des probabilités totales :

$p(T) = p_D(T) \times p(D) + p_{\overline{D}}(T) \times p\left(\overline{D}\right)$ ou encore

$0,05 = 0,97p + 0,01(1 - p) \iff 0,05 = 0,97p + 0,01 - 0,01p \iff$

$0,96p = 0,04 \iff p = \dfrac{4}{96} = \dfrac{1}{24}$. (un peu plus de 2 coureurs sur 50)

2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

Il faut calculer $p_T\left(\overline{D}\right) = \dfrac{p\left(T \cap \overline{D}\right)}{p(T)} = \dfrac{0,01\left(1 - \frac{1}{24}\right)}{0,05} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{23}{24} = \dfrac{23}{120} \approx 0,19$.

Exercice 4 : /2 points

Commun à tous les candidats

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z)=z^3-\left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z-2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0=\mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z)=0$.

   $P\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)=\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^3-\left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2+2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)-2\mathrm{i}\sqrt{2}=$
   $-2\mathrm{i}\sqrt{2}+4+2\mathrm{i}\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}-4-2\mathrm{i}\sqrt{2}=0\iff\mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.

2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z)=\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

   Développons : $\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)=z^3+az^2+bz-z^2\mathrm{i}\sqrt{2}-az\mathrm{i}\sqrt{2}-b\mathrm{i}\sqrt{2}=z^3+\left(a-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2+\left(b-a\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z-b\mathrm{i}\sqrt{2}$.

   Par identification avec l'énoncé, on obtient :

   $$\left\{\begin{array}{lcl}a-\mathrm{i}\sqrt{2}&=&-2-\mathrm{i}\sqrt{2}\\ b-a\mathrm{i}\sqrt{2}&=&2+2\mathrm{i}\sqrt{2}\\ -b\mathrm{i}\sqrt{2}&=&-2\mathrm{i}\sqrt{2}\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}a&=&-2\\ b+2\mathrm{i}\sqrt{2}&=&2+2\mathrm{i}\sqrt{2}\\ -b&=&-2\end{array}\right.\iff$$

   $$\left\{\begin{array}{lcl}a&=&-2\\ b&=&2\\ b&=&2\end{array}\right.$$

   On a donc $P(z)=\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right)$

   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.

   En utilisant la factorisation précédente :

   $$P(z)=0\iff\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right)\iff\left\{\begin{array}{lcl}z-\mathrm{i}\sqrt{2}&=&0\\ z^2-2z+2&=&0\end{array}\right.$$

   On retrouve la racine $\mathrm{i}\sqrt{2}$; résolution de l'équation du second degré :

   $z^2-2z+2=0\iff(z-1)^2-1+2=0\iff(z-1)^2+1=0\iff$

   $$(z-1)^2=-1\iff(z-1)^2=\mathrm{i}^2\iff\left\{\begin{array}{lcl}z-1&=&\mathrm{i}\\ z-1&=&-\mathrm{i}\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}z&=&1+\mathrm{i}\\ z&=&1-\mathrm{i}\end{array}\right.$$

   Les solutions sont donc : $\mathrm{i}\sqrt{2}$, $1+\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$.

Exercice 5 : /3 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n-2n+3$.

1. Calculer u_1 et u_2. $u_1=3$ et $u_2=10$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant n$.

   Démontrons par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété P_n : $u_n\geqslant n$.

   - $u_0=0\geqslant 0$ donc la propriété P_0 est vérifiée.
   - Supposons la propriété P_n vraie pour une valeur de n fixée.
     $u_{n+1}=3u_n-2n+3\geqslant 3n-2n+3\geqslant n+3\geqslant n+1$ la propriété est donc alors vérifiée au rang $n+1$.
   - Conclusion : D'après la propriété de récurrence on en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant n$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Par le théorème de comparaison, $\lim (u_n) = +\infty$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 \geqslant 3 \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$.
La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 3.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

Pour tout entier naturel n, $v_n = 3^n$ et $u_n = v_n + n - 1$ donc $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.
Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ donc on peut affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

***Exercice* 6** : /2 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

La rédaction des réponses aux deux questions suivantes doit être soignée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2+2x+3}$

$$x^2 + 2x + 3 = x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$$

Or, $\frac{2}{x}$ et $\frac{3}{x^2}$ tendent vers 0 quand x tend vers $-\infty$, on conclut (par produit) que $x^2 + 2x + 3$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

Par ailleurs, $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, on conclut (par composition) que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2+2x+3} = +\infty$

2. Déterminer la baisse (exprimée en pourcentage) qui compensera exactement une hausse de 25 % (c'est-à-dire que la hausse de 25 % suivie de la baisse que vous aurez déterminée ne donne au final aucune variation).

Une hausse de 25 % se traduit par une multiplication par 1,25 ; si on a une baisse qui suit, de coefficient multiplicateur k, les deux baisses successives se traduisent par un coefficient multiplicateur $1,25 \times k$ qui doit être égal à 1 pour traduire le fait qu'il n'y a pas de variation au global.

Cela donne : $1,25 \times k = 1$ et donc $k = \dfrac{1}{1,25} = 0,8$: cela traduit une baisse de 20 %.

Exercice 7 : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Toutes les questions sont indépendantes.

1) Soit N une matrice carrée telle que $N^2=2N+I$, où I est la matrice identité.

   Etudier le produit $N(N-2I)$ pour montrer que N est inversible et donner une expression de son inverse.

2) A et B sont les matrices données ci-dessous.

   $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & ? \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$

   Certains coefficients sont inconnus, mais on sait qu'ils sont non nuls.

   On sait par ailleurs que $A\times B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Justifier que A ne peut pas être inversible, et en déduire la valeur de son coefficient inconnu. On ne demande pas les coefficients de B.

3) Soient A et B deux matrices carrées telles que les produits matriciels $A\times B$ et $B\times A$ sont égaux à la matrice nulle, que l'on notera O.

   Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $(A+B)^n=A^n+B^n$

4) On rappelle qu'une fraction est irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.

   Pour quels entiers relatifs n la fraction $\dfrac{3n+4}{2n+5}$ est-elle irréductible ?

5) Quel est le reste dans la division euclidienne de 1789^{2014} par 17 ? Justifier votre réponse.

   Remarque : votre calculatrice n'a pas la capacité de calculer les puissances de 1789 au delà de 2 ou 3.