durée : 4 h **calculatrice autorisée**

Proposition de corrigé

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

***Exercice* 1** : / 3 points

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A$(1\,;2\,;5)$, B$(-1\,;6\,;4)$ et C$(7\,;-10\,;8)$.

1. Les points A, B et C définissent-ils un plan ? (réponse à justifier)

   On va étudier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en déterminant leurs coordonnées :

   $\overrightarrow{AB} = (-2\,;4\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC} = (6\,;-12\,;3)$; on a donc : $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$

   Les vecteurs étant colinéaires, les points **A, B et C sont alignés et ne définissent donc pas de plan**.

2. Déterminer une équation paramétrique (de paramètre t) de la droite (AB).

   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires $\iff$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$

   $$\iff \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-5 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-1 &=& -2t \\ y-2 &=& 4t \\ z-5 &=& -t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-2t \\ y &=& 2+4t \\ z &=& 5-t \end{array}\right.$$

   (AB) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-2t \\ y &=& 2+4t \\ z &=& 5-t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation paramétrique (de paramètres u et v)

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+u \\ y &=& 1-v \\ z &=& 5-u \end{array}\right.$$

   Déterminer $(AB) \cap \mathscr{P}$.

   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (AB) \cap \mathscr{P} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-2t \\ y &=& 2+4t \\ z &=& 5-t \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+u \\ y &=& 1-v \\ z &=& 5-u \end{array}\right.$

   On résout $\left\{\begin{array}{lcl} 1-2t &=& 3+u \\ 2+4t &=& 1-v \\ 5-t &=& 5-u \end{array}\right.$

   La dernière ligne donne : $t = u$ et en remplaçant u par t dans la première ligne, on obtient : $t = -\dfrac{2}{3}$

   Ensuite, en remplaçant t par sa valeur dans l'équation paramétrique de la droite (AB), on obtient : $x = \dfrac{7}{3}$, $y = -\dfrac{2}{3}$ et $z = \dfrac{17}{3}$

   Conclusion : la droite (AB) et le plan $\mathscr{P}$ se coupent au point M de coordonnées $\left(\dfrac{7}{3}\,;-\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{17}{3}\right)$

Exercice **2** : /2 points

Commun à tous les candidats

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

$P\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) = \left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right) - 2\mathrm{i}\sqrt{2} =$
$-2\mathrm{i}\sqrt{2} + 4 + 2\mathrm{i}\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 4 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} = 0 \iff \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2. a. Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

Développons : $\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right) = z^3+az^2+bz-z^2\mathrm{i}\sqrt{2}-az\mathrm{i}\sqrt{2}-b\mathrm{i}\sqrt{2} = z^3+\left(a-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2+\left(b-a\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z-b\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Par identification avec l'énoncé, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a-\mathrm{i}\sqrt{2} & = & -2-\mathrm{i}\sqrt{2} \\ b-a\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 2+2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -b\mathrm{i}\sqrt{2} & = & -2\mathrm{i}\sqrt{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ b+2\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 2+2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -b & = & -2 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ b & = & 2 \\ b & = & 2 \end{array}\right.$$

On a donc $P(z) = \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right)$

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

En utilisant la factorisation précédente :

$$P(z) = 0 \iff \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 0 \\ z^2-2z+2 & = & 0 \end{array}\right.$$

On retrouve la racine $\mathrm{i}\sqrt{2}$; résolution de l'équation du second degré :

$$z^2-2z+2 = 0 \iff (z-1)^2-1+2 = 0 \iff (z-1)^2+1 = 0 \iff$$

$$(z-1)^2 = -1 \iff (z-1)^2 = \mathrm{i}^2 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-1 & = & \mathrm{i} \\ z-1 & = & -\mathrm{i} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & 1+\mathrm{i} \\ z & = & 1-\mathrm{i} \end{array}\right.$$

Les solutions sont donc : $\mathrm{i}\sqrt{2}$, $\quad 1+\mathrm{i}$, $\quad 1-\mathrm{i}$.

Exercice 3 : / 5 points

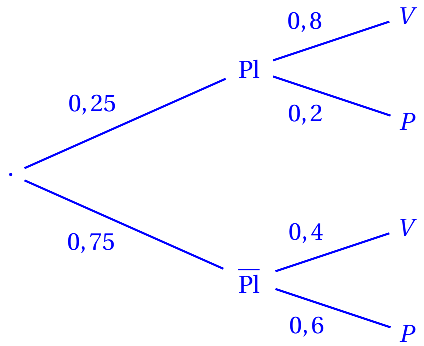
Commun à tous les candidats

Pour chacune des six affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0, 6.
Affirmation no 1 :
« Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

Affirmation nº 1 : VRAIE

Arbre de probabilités :



Pl : il pleut ; V : en voiture ; P : à pied

On cherche $p(V)$:

$$\begin{aligned} p(V) &= p(V\cap \text{Pl}) + p(V\cap\overline{\text{Pl}}) \\ &= p_{\text{Pl}}(V)\times p(\text{Pl}) + p_{\overline{\text{Pl}}}(V)\times p(\overline{\text{Pl}}) \\ &= 0,8\times 0,25 + 0,4\times 0,75 = 0,5 \end{aligned}$$

« Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

Affirmation nº 2 :
« Si Zoé arrive à son travail à pied, la probabilité qu'il pleuve ce jour là est égale à 0,2. »

Affirmation nº 2 : FAUSSE

Il s'agit de calculer $P_P(Pl)$; on a : $P_P(Pl) = \dfrac{P(P\cap Pl)}{P(P)} = \dfrac{0,25\times 0,2}{0,5} = 0,1$

2. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B.
Affirmation nº 3 :
« Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. »

Affirmation nº 3 : VRAIE

A et B sont indépendants signifie que $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$:

$$p(A) = p(A\cap B) + p(A\cap\overline{B}) = p(A)\times p(B) + p(A\cap\overline{B})$$

$$\Longrightarrow p(A\cap\overline{B}) = p(A) - p(A)\times p(B) = p(A)\left(1-p(B)\right) = p(A)\times p(\overline{B})$$

3. On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+.
On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A+.
Affirmation nº 4 :
« On ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. »

Affirmation nº 4 : VRAIE

Comme $0,2 < p < 0,8$, on peut utiliser la formule donnant l'intervalle de fluctuation : $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$; cela donne ici (valeurs approchées au centième) : $[0,32\ ;\ 0,46]$: comme 0,34 appartient à cet intervalle, rien ne permet de rejeter l'hypothèse donnant une proportion égale à 39 % de personnes du groupe A+ au sein de la population.

Autre méthode avec la loi binomiale : on s'attend, sur 183 personnes, à avoir environ 71 qui sont du groupe A+ (39 % de 183) ; comme on n'en a que 34 % (soit environ 62 personnes), on va se demander si 62 est inférieur ou pas à la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation donné par une loi binomiale de paramètres $n = 183$ et $p = 0,39$.

Pour cela, on calcule $P(X \leqslant 62)$, où X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 183$ et $p = 0,39$.

Or, $P(X \leqslant 62) \approx 0,09 > 0,025$: cet effectif est bien à l'intérieur de l'intervalle de fluctuation ; on a (heureusement !) la même conclusion que précédemment.

4. Une urne opaque est composée de deux boules noires et d'une boule rouge, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si elle est rouge, on la conserve, sinon on la remet dans l'urne et on procède à un nouveau tirage. On note X la variable aléatoire qui donne le rang de sortie de la boule rouge (par exemple, si la boule rouge sort au deuxième tirage, on obtient $X = 2$).

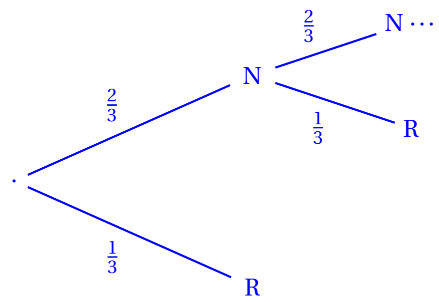
Affirmation n° 5 :
« Si on effectue n essais, X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{3}$ »

Affirmation n° 5 : FAUSSE

La variable aléatoire X ne compte pas un nombre de succès : elle ne suit pas une loi binomiale.

Affirmation n° 6 :
« pour tout entier naturel strictement positif n, $P(X = n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{3}$ »

Affirmation n° 6 : VRAIE



N : obtenir une boule noire ; R : obtenir une boule rouge

Si on obtient la boule rouge au n[ième] tirage, cela signifie que l'on a obtenu que des boules noires aux tirages précédents (il y en a eu $n-1$).

Ainsi, on a $n-1$ branches pondérées par la probabilité $\frac{2}{3}$ et une seule (celle qui signifie qu'on a obtenu la boule rouge au dernier tirage) pondérée par la probabilité $\frac{1}{3}$: en multipliant les probabilités inscrites sur les branches, cela donne une probabilité égale à $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{3}$.

Exercice **4** : / 5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Émettre une conjecture sur le signe de f ; expliquer votre démarche.

   On peut conjecturer, en utilisant une représentation graphique, que $f \geqslant 0$.

2. Démontrer votre conjecture.

   On peut étudier rapidement cette fonction en dérivant f : $f'(x) = e^x - 1$; et donc f' est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$; elle présente un minimum en 0 égal à $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$: la conjecture est démontrée.

3. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

   $$(1) \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2) \quad \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$

   On utilise le résultat précédent avec $x = \dfrac{1}{n}$: $e^{\frac{1}{n}} - \dfrac{1}{n} - 1 \geqslant 0 \iff e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}$

   De même avec $x = -\dfrac{1}{n+1}$: $e^{-\frac{1}{n+1}} - \left(-\dfrac{1}{n+1}\right) - 1 \geqslant 0 \iff e^{-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n+1}$

4. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

   $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

   On utilise l'égalité (1) et on utilise la fonction $x \to x^n$ qui est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ pour obtenir l'inégalité voulue en remarquant que $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = e$

5. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

   $$\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

   On utilise l'égalité (2) et on utilise la fonction $x \to x^{n+1}$ qui est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$; on obtient :

   $$\left(\mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}}\right)^{n+1} \geqslant \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

   $$\mathrm{e}^{-1} \geqslant \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}$$

   $$\frac{1}{\mathrm{e}} \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

   $$\mathrm{e} \leqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \text{ (par inverse)}$$

   $$\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

6. Déduire des questions précédentes un encadrement de

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

puis sa limite en $+\infty$.

On a donc (question 4) :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

D'après la question 5 :

$$\mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{\mathrm{e}}{1+\dfrac{1}{n}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\frac{n\mathrm{e}}{n+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Ainsi,

$$\frac{n\mathrm{e}}{n+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

Comme $\dfrac{n\mathrm{e}}{n+1}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$, on conclut par le théorème d'encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

***Exercice* 5** : / 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.

La population totale est constante et égale à 120 millions donc, pour tout entier naturel n, on peut dire que $u_n + v_n = 120$.

2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).
Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
	...	...	...
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

Dans B3 on entre la formule `=0,9*B2+0,05*C2`.

Dans C3 on entre la formule `=0,1*B2+0,95*C2`.

3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

D'après les données du tableur, la suite (u_n) (donc le nombre de ruraux) semble décroitre et tendre vers 40 millions, et la suite (v_n) (donc le nombre de citadins) semble croitre et tendre vers 80 millions.

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

1. **a.** Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n > u_{n+1}$.

- $u_0 = 90$ et $u_1 = 0,85u_0 = 0,85 \times 90 + 6 = 82,5$ donc $u_0 > u_1$
La propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang $p \neq 0$, c'est-à-dire $u_p > u_{p+1}$.
$u_p > u_{p+1} \iff 0,85u_p > 0,85u_{p+1} \iff 0,85u_p + 6 > 0,85u_{p+1} + 6 \iff u_{p+1} > u_{p+2}$
Donc la propriété est vraie au rang $p+1$; elle est héréditaire.
- $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout n, $u_n > u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est décroissante.

b. On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n.
Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?

On a vu que la suite était décroissante.
Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$.

a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.

- $w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85(w_n + 40) - 34 = 0,85w_n + 34 - 34 = 0,85w_n$
- $w_0 = u_0 - 40 = 90 - 40 = 50$

Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $w_0 = 50$.

b. En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.

D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout n : $w_n = w_0 \times q^n = 50 \times 0,85^n$
Comme pour tout n, $u_n = w_n + 40$, on peut dire que $u_n = 50 \times 0,85^n + 40$

c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

Pour tout n, $\left.\begin{array}{l} u_n + v_n = 120 \\ u_n = 50 \times 0,85^n + 40 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_n = 80 - 50 \times 0,85^n$

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question **3.** de la **partie A**.

- Pour tout n, $w_n = 50 \times 0,85^n$ donc $w_n > 0$
  $w_{n+1} = 0,85w_n < w_n$ et donc la suite (w_n) est décroissante.
  Comme pour tout n, $u_n = w_n + 40$, la suite (u_n) est décroissante.
- (w_n) est géométrique de raison $0,85$; or $-1 < 0,85 < 1$ donc la suite (w_n) converge vers 0.
  Comme pour tout n, $u_n = w_n + 40$, la suite (u_n) converge vers 40.
- Pour tout n, $v_n = 120 - u_n$ et la suite (u_n) est décroissante, donc la suite (v_n) est croissante.
- La suite (u_n) est convergente vers 40 et, pour tout n, $v_n = 120 - u_n$, donc la suite (v_n) est convergente vers $120 - 40 = 80$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geqslant 120 - u$ faire
	n prend la valeur $n + 1$
	u prend la valeur $0,85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a. Que fait cet algorithme ?

Dans cet algorithme, la variable u, initialisée à 90, représente le terme u_n, et $120 - u$ représente donc v_n.
On sort de la boucle « tant que » dès que $u < 120 - u$ c'est-à-dire dès que $u_n < v_n$; l'algorithme affiche donc la plus petite valeur n pour laquelle $u_n < v_n$.
C'est la plus petite valeur de n pour laquelle le nombre de ruraux est devenu inférieur au nombre de citadins.

b. Quelle valeur affiche-t-il ?

D'après le tableur, $u_5 > v_5$ et $u_6 < v_6$ donc la valeur affichée sera 6.

Exercice **6** : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Les deux parties sont totalement indépendantes.

Partie 1 2,5 points

On appelle triplet pythagoricien trois entiers non nuls x, y, z vérifiant $x^2 + y^2 = z^2$

1. **a.** Dresser un tableau avec les congruences possibles d'un entier $n \in \mathbb{N}$ et de son carré, modulo 3.

   b. En déduire que dans un triplet pythagoricien, au moins x ou y est un multiple de 3.
2. Dans cette question, on pourra admettre que puisque $x^2 + y^2 = z^2$ avec x, y et z non nuls, on a $y < z$.
3. **a.** Justifier que dans un triplet pythagoricien, $y + z$ divise x^2.

   b. En déduire qu'il n'existe pas de triplet pythagoricien avec $x = 1$.

   Remarque : il n'est pas demandé de le faire, mais avec la même démarche, on pourrait aussi montrer qu'il n'existe pas non plus de triplet pythagoricien avec $x = 2$.

   a. Montrer que si $z = y + 1$, alors x est nécessairement un nombre impair.

   b. Montrer réciproquement que pour tout x impair plus grand que 1, il existe un triplet pythagoricien $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ avec $z = y + 1$.

Partie 2 2,5 points

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ v_1 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n + \frac{1}{2} \cdot v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + \frac{2}{3} \cdot v_n \end{cases}$$

On note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A \cdot X_n$ avec A une matrice que l'on déterminera.
2. Retrouver les premiers termes u_0 et v_0 par une démarche matricielle à détailler puis à réaliser à l'aide de votre calculatrice.
3. Pour la suite, on admet que pour tout , $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   a. On donne $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

   Vérifier à la calculatrice que P est inversible, et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

   b. Démontrer en détail que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.
4. Déduire de ce qui précède l'expression de u_n et v_n en fonction de n, et montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers $\frac{3}{5}$.

Eléments de correction

Partie 1

1) Congruences modulo 3

n	n^2
0	$0\times0\equiv0$
1	$1\times1\equiv1$
2	$2\times2\equiv4\equiv1$

On en déduit que si $x^2+y^2=z^2$, alors x^2+y^2 est nécessairement congru à 0 ou 1 modulo 3.

x	y	x^2+y^2
0	0	0
0	1	1
0	2	$4\equiv1$
1	0	1
1	1	2
1	2	$5\equiv2$
2	0	$4\equiv1$
2	1	$5\equiv2$
2	2	$8\equiv2$

Par disjonction des neufs cas possibles, on montre que lorsque x^2+y^2 est congru à 0 ou à 1, on a nécessairement $x\equiv0$ ou $y\equiv0$ modulo 3.

2a) Si $x^2+y^2=z^2$, alors $x^2=z^2-y^2=(z-y)(z+y)$, et donc $z+y$ divise x^2.

b) Supposons que le triplet existe avec $x=1$,

D'après a), $z+y$ divise 1 donc $z+y=1$. Or y et z sont non nuls, donc $z+y\geqslant2$.

Le triplet n'existe donc pas.

Remarque : supposons que le triplet existe avec $x=2$,

D'après a), $z+y$ divise 4, donc $(z+y)\in d(4)=\{1,2,4\}$

$z+y=1$ est impossible (voir b)

$z+y=2$, aussi car $0<y<z$ donc $z+y\geqslant3$.

Si $z+y=4$, alors $y=1$ et $z=3$, et $2^2+1^2\neq3^2$

Dans les trois cas, on a montré que le triplet n'existait pas.

3a) Si $z=y+1$, alors $x^2+y^2=z^2 \Leftrightarrow x^2=(y+1)^2-y^2 \Leftrightarrow x^2=2y+1$

Si le triplet existe, alors x^2 est nécessairement impair, et donc x aussi.

b) Si x est impair plus grand que 1, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = 2n+1$.

Pour $y = 2n^2 + 2n$, on a bien $2y + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 = x^2$, et donc le triplet existe d'après a).

(remarque : puisque z est ici fonction de y, il suffit de trouver y pour montrer l'existence du triplet)

Partie 2

1) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2) On remarque que A est inversible.

$X_1 = A \times X_0 \Leftrightarrow X_0 = A^{-1} \times X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$

3a) Pas de rédaction.

b) On montre cela par récurrence

L'initialisation a été faite au a)

Hérédité : on suppose pour un n fixé que $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$

$A^{n+1} = A \times A^n = (P \times D \times P - 1) \times (P \times D^n \times P^{-1}) = P \times D \times (P^{-1} \times P) \times D^n \times P^{-1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$

4) Après calculs (un peu longs), on trouve $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{1}{6^n}\right) \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}$

Puisque $0 < \frac{1}{6} < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{6^n} = 0$.

Par somme et produit de limites, on en déduit que :

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{5} \times (1 - 0) = \frac{3}{5}$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times 0 = \frac{3}{5}$