durée : 4 h **calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

***Exercice* 1** : /2,5 points

Commun à tous les candidats

Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue ; pour rappel, on peut la décrire, pour u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I par :

pour tout $x \in I$, $\left(u(x)(v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q.
Dire pour chacune d'elles, si elle est vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

* P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.
* Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

***Exercice* 2** : /2,5 points

Commun à tous les candidats

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

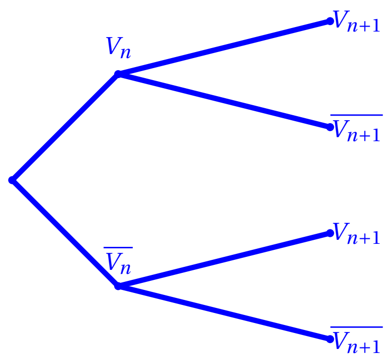
***Exercice* 3** : /4 points

Commun à tous les candidats

Dans un pays imaginaire, la probabilité qu'un habitant transmette fidèlement une information reçue est de $\frac{4}{5}$, celle qu'il dise exactement le contraire est de $\frac{1}{5}$.

Un jour, une certaine information, vraie à l'origine, se répand de bouche à oreille parmi les habitants de ce pays. On désigne par V_n l'évènement « l'information transmise par la n^{ieme} personne est vraie » et on note p_n la probabilité de V_n.

1. **a.** Illustrer la transmission de l'information au stade des n^{ieme} et $n+1^{ième}$ personnes, par un arbre de probabilités , tel que celui ci-dessous à compléter.



   b. Justifier que $p_1 = \frac{4}{5}$ et montrer que $p_{n+1} = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{1}{2}$

   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.

   b. En déduire l'expression de (p_n) en fonction de n.

***Exercice* 4** : /3 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On dispose d'une partie de programme présenté sous la forme d'un algorithme : `Variables :`

```
      n, p, k : entiers naturels ;
Début :
      Entrer (n);
      Entrer (p);
      k ← 0;
      TantQue P(X ≤ k) ≤ 0,025
            Faire k ← k+1;
      FinTantQue;
Fin
```

On vous indique que X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

1. **a.** A quoi correspondent les valeurs N et P demandées à l'utilisateur au début du programme ?

   b. A quoi correspond la valeur de K à la fin du programme ?

2. Réécrire l'algorithme pour qu'il calcule les deux bornes de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale de paramètres n et p.

Partie B

On vous indique que les gauchers représentent 12 % des personnes en règle générale.

Sur les 50 premiers joueurs de tennis au classement ATP, 3 sont gauchers. D'après ces données, on se demande si les gauchers sont plutôt favorisés au tennis, ou spécialement défavorisés.

On note G la variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre 0,12 et 50.

1. Expliquer en quoi G est utile pour répondre au problème posé.
2. Calculer *(les valeurs seront arrondies au millième)* :
   a. $P(G \leqslant 1)$
   b. $P(G \leqslant 2)$
   c. $P(G \leqslant 10)$
   d. $P(G \leqslant 11)$
3. En utilisant les résultats précédents, répondre à la question initiale sur la présence de 3 joueurs gauchers parmi les 50 premiers au classement ATP.

***Exercice* 5** : /3 points

Commun à tous les candidats

Sur une route de montagne étroite, on considère qu'il y a deux types de risques majeurs :

– la collision avec un autre véhicule (risque 1) ;

– la chute d'une pierre sur votre véhicule (risque 2).

Le but de cet exercice est de déterminer la vitesse qui minimise les risques sur une route de montagne.

Nous allons **modéliser** les deux risques présentés :

– on considère que le risque 1 est proportionnel à la vitesse de votre véhicule (cette modélisation traduit le fait que plus on roule vite, plus le risque de collision est grand).

– on considère que le risque 2 est inversement proportionnel à la vitesse de votre véhicule, c'est-à-dire proportionnel à $\dfrac{1}{v}$ en notant v la vitesse du véhicule (cette modélisation traduit le fait que plus on roule doucement, plus la durée dans la zone dangereuse est grande, ce qui accroît le risque de recevoir une pierre).

On considérera des vitesses allant de 10 km/h au minimum, à 90 km/h au maximum.

On veut modéliser le risque global ; ce risque global est la somme du risque de type 1 et du risque de type 2.

Par ailleurs, on souhaite que ce risque global ait des valeurs comprises entre 0 et 100 : 0 serait un risque nul, et 100 le risque maximum. On impose que le risque soit égal à 100 pour les vitesses de 10 km/h et de 90 km/h.

1. Si on note r la fonction « risque global », justifiez que cette fonction est de la forme : $r(v) = av + \dfrac{b}{v}$ pour la modélisation présentée précédemment.
2. Vérifiez qu'une telle modélisation est possible : pour cela, vous exprimerez explicitement la fonction risque (qui a pour variable la vitesse) et vous vérifierez que pour des vitesses comprises entre 10 km/h et 90 km/h, le risque est compris entre 0 et 100.
   Toute trace de recherche pertinente sera valorisée pour cette question.
3. Déterminez la vitesse qui minimise le risque avec ce modèle.

***Exercice* 6** : /2,5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Prouver que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$

2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

***Exercice* 7** : /2,5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour les questions suivantes, donnez la réponse en la justifiant soigneusement.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n+(-1)^n$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+3n-1}{5-n^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^x}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \dfrac{x+1}{x^2-1}$

***Exercice* 8** : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Toutes les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $2n^2+n+2 \equiv 0$ [5] équivaut à $n \equiv 1$ [5].

2. Soit N une matrice telle que $n^2 = I+2N$ où I est la matrice identité.

   Bob dit qu'en exprimant N^2-2N de deux façons, il peut affirmer que N est inversible.

   Qu'en pensez-vous ?

3. Soient A et B deux matrices carrées telles que les produits matriciels $A\times B$ et $B\times A$ sont égaux à la matrice nulle, que l'on notera O.

   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $(A+B)^n = A^n + B^n$

   On prendra soin de bien rédiger et de détailler toutes les étapes de calcul nécessaires.

4. n est un entier relatif.

   Pour quelles valeurs de n la fraction $\dfrac{5n+3}{3n+4}$ est-elle un entier relatif aussi ?

5. Quel est le reste dans la division euclidienne de 1789^{2014} par 17 ?

   Justifier votre réponse.