durée : 4 h **calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

***Exercice* 1** : /2 points

Commun à tous les candidats

Restitution organisée de connaissances

On vous rappelle le théorème suivant (dit « théorème de minoration ») :

Soient deux suites u et v et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

En utilisant au besoin ce théorème, vous démontrerez qu'une suite géométrique de raison $q > 1$ diverge vers $+\infty$

***Exercice* 2** : /5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Émettre une conjecture sur le signe de f ; expliquer votre démarche.
2. Démontrer votre conjecture.
3. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :
$$(1) \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2) \quad \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$
4. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$
5. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n
$$\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
6. Déduire des questions précédentes un encadrement de
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$
puis sa limite en $+\infty$.

***Exercice* 3** : /6 points

Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
- « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle $[1 ; 50]$
- l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ; $c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ; $e :=$ rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
$L_1 = \{2 ; 11 ; 44 ; 2 ; 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
$L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

2. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à $0,1$.

3. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :
- il a été contrôlé 5 fois exactement ;
- il n'a pas été contrôlé ;
- il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.
On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».
Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :
- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer $P(D)$.

2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

***Exercice* 4** : /2 points

Commun à tous les candidats

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

***Exercice* 5** : /3 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

***Exercice* 6** : /2 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

La rédaction des réponses aux deux questions suivantes doit être soignée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2+2x+3}$
2. Déterminer la baisse (exprimée en pourcentage) qui compensera exactement une hausse de 25 % (c'est-à-dire que la hausse de 25 % suivie de la baisse que vous aurez déterminée ne donne au final aucune variation).

Exercice 7 : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Toutes les questions sont indépendantes.

1) Soit N une matrice carrée telle que $N^2=2N+I$, où I est la matrice identité.

   Etudier le produit $N(N-2I)$ pour montrer que N est inversible et donner une expression de son inverse.

2) A et B sont les matrices données ci-dessous.

   $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & ?\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}?\\ ?\end{pmatrix}$

   Certains coefficients sont inconnus, mais on sait qu'ils sont non nuls.

   On sait par ailleurs que $A\times B=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

   Justifier que A ne peut pas être inversible, et en déduire la valeur de son coefficient inconnu. On ne demande pas les coefficients de B.

3) Soient A et B deux matrices carrées telles que les produits matriciels $A\times B$ et $B\times A$ sont égaux à la matrice nulle, que l'on notera O.

   Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $(A+B)^n=A^n+B^n$

4) On rappelle qu'une fraction est irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.

   Pour quels entiers relatifs n la fraction $\dfrac{3n+4}{2n+5}$ est-elle irréductible ?

5) Quel est le reste dans la division euclidienne de 1789^{2014} par 17 ? Justifier votre réponse.

   Remarque : votre calculatrice n'a pas la capacité de calculer les puissances de 1789 au delà de 2 ou 3.