durée : 4 h **calculatrice autorisée**

Dans tout ce devoir, la qualité de la rédaction et le soin seront pris en compte dans la notation.

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Bien indiquer les numéros des exercices

Les élèves suivant l'enseignement de Spécialité rédigeront l'exercice qui leur est réservé sur une feuille à part.

***Exercice* 1** : / 3 points

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; 2 ; 5), B(−1 ; 6 ; 4) et C(7 ; −10 ; 8).

1. Les points A, B et C définissent-ils un plan ? (réponse à justifier)
2. Déterminer une équation paramétrique (de paramètre t) de la droite (AB).
3. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation paramétrique (de paramètres u et v)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+u \\ y & = & 1-v \\ z & = & 5-u \end{array}\right.$$

   Déterminer $(AB) \cap \mathcal{P}$.

***Exercice* 2** : /2 points

Commun à tous les candidats

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

***Exercice* 3** : / 5 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des six affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
   Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
   Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à $0,6$.
   Affirmation n° 1 :
   « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

   Affirmation n° 2 :
   « Si Zoé arrive à son travail à pied, la probabilité qu'il pleuve ce jour là est égale à 0,2. »

2. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B.
   Affirmation n° 3 :
   « Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. »
3. On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+.
   On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
   On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A+.
   Affirmation n° 4 :
   « On ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. »
4. Une urne opaque est composée de deux boules noires et d'une boule rouge, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si elle est rouge, on la conserve, sinon on la remet dans l'urne et on procède à un nouveau tirage. On note X la variable aléatoire qui donne le rang de sortie de la boule rouge (par exemple, si la boule rouge sort au deuxième tirage, on obtient $X = 2$).

   Affirmation n° 5 :
   « Si on effectue n essais, X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{3}$ »

   Affirmation n° 6 :
   « pour tout entier naturel strictement positif n, $P(X = n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{3}$ »

***Exercice* 4** : / 5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Émettre une conjecture sur le signe de f ; expliquer votre démarche.
2. Démontrer votre conjecture.
3. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2) \quad \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$

4. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

5. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

6. Déduire des questions précédentes un encadrement de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

puis sa limite en $+\infty$.

***Exercice* 5** : / 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).

   Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
	...	...	...
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

1. **a.** Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

b. On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n.
Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?

2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$.

a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.

b. En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question **3.** de la **partie A**.

4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geqslant 120 - u$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0,85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a. Que fait cet algorithme ?

b. Quelle valeur affiche-t-il ?

Exercice **6** : /5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité : exercice à rédiger sur feuille à part

Les deux parties sont totalement indépendantes.

Partie 1 2,5 points

On appelle triplet pythagoricien trois entiers non nuls x, y, z vérifiant $x^2 + y^2 = z^2$

1. **a.** Dresser un tableau avec les congruences possibles d'un entier $n \in \mathbb{N}$ et de son carré, modulo 3.

   b. En déduire que dans un triplet pythagoricien, au moins x ou y est un multiple de 3.

2. Dans cette question, on pourra admettre que puisque $x^2 + y^2 = z^2$ avec x, y et z non nuls, on a $y < z$.

3. **a.** Justifier que dans un triplet pythagoricien, $y + z$ divise x^2.

   b. En déduire qu'il n'existe pas de triplet pythagoricien avec $x = 1$.

   Remarque : il n'est pas demandé de le faire, mais avec la même démarche, on pourrait aussi montrer qu'il n'existe pas non plus de triplet pythagoricien avec $x = 2$.

   a. Montrer que si $z = y + 1$, alors x est nécessairement un nombre impair.

   b. Montrer réciproquement que pour tout x impair plus grand que 1, il existe un triplet pythagoricien $(x\,;\,y\,;\,z)$ avec $z = y + 1$.

Partie 2 2,5 points

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ v_1 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n + \frac{1}{2} \cdot v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + \frac{2}{3} \cdot v_n \end{cases}$$

On note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A \cdot X_n$ avec A une matrice que l'on déterminera.

2. Retrouver les premiers termes u_0 et v_0 par une démarche matricielle à détailler puis à réaliser à l'aide de votre calculatrice.

3. Pour la suite, on admet que pour tout , $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   a. On donne $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

   Vérifier à la calculatrice que P est inversible, et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

   b. Démontrer en détail que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

4. Déduire de ce qui précède l'expression de u_n et v_n en fonction de n, et montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers $\frac{3}{5}$.