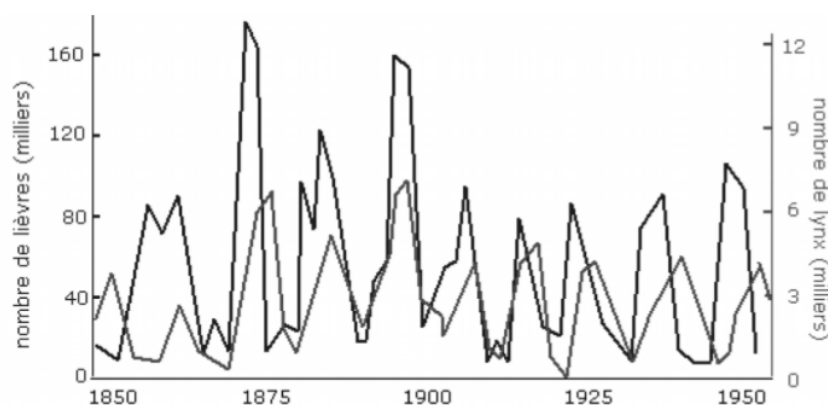


Document d'aide pour traiter l'activité dite 'prédateur proie'

Il s'agit d'un extrait d'article écrit par Louis-Marie BONNEVAL, diffusé dans la revue de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

Pour aborder ce modèle, je propose de partir des statistiques de la Hudson Bay Company, qui commercialise les fourrures fournies par les trappeurs du Nord canadien. Sur un siècle, cette entreprise a pu évaluer l'évolution de la population de lynx et de lièvres arctiques dans cette vaste région. Elle a obtenu les résultats ci-dessous⁽¹⁾ :



On constate un phénomène qui peut surprendre : les effectifs de chaque population évoluent selon une périodicité approximative, avec un décalage temporel entre les deux espèces. On peut rechercher un modèle qui rende compte de cette évolution couplée, sachant que les lièvres constituent la nourriture quasi exclusive des lynx.

L'Italien Vito Volterra (1860-1940) [9] et l'Américain Alfred James Lotka (1880-1949) [5] ont travaillé, indépendamment l'un de l'autre, sur de telles populations (animales ou végétales) partageant un même territoire, et dont l'une est la proie de l'autre : requins et sardines⁽²⁾, lions et coqs, herbivores et plantes fourragères, protozoaires et bactéries, ...

Ils ont élaboré différents modèles pour rendre compte de l'évolution de leurs effectifs dans le temps. Pour cela ils ont utilisé des systèmes d'équations différentielles, mais pour rester dans le cadre de la spécialité de Terminale S nous allons ici en donner une version discrète⁽³⁾.

Un premier modèle

On note respectivement x_n et y_n les effectifs de proies et de prédateurs pour l'année n .

On fait les hypothèses suivantes :

- le taux d'accroissement des proies résulte d'un taux de natalité constant a et d'un taux de mortalité by_n proportionnel au nombre de prédateurs.
- le taux d'accroissement des prédateurs résulte d'un taux de natalité cx_n proportionnel au nombre de proies, et d'un taux de mortalité constant d .

On obtient ainsi les relations :

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = (a - by_n)x_n \\ y_{n+1} - y_n = (cx_n - d)y_n \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x_{n+1} = (1 + a)x_n - bx_n y_n \\ y_{n+1} = (1 - d)y_n + cx_n y_n \end{cases}.$$

On peut alors étudier au tableur⁽⁴⁾ l'évolution de x_n et y_n , en fonction des valeurs initiales (entières positives) x_0 et y_0 et des coefficients (strictement positifs) a, b, c, d . Supposons par exemple $x_0 = 53\,000$ et $y_0 = 9\,000$, et prenons comme coefficients⁽⁵⁾ :

$$a = 0,09 ; b = 10^{-5} ; c = 5 \times 10^{-6} ; d = 0,25.$$