Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\begin{cases} u_1 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \dfrac{n+1}{2n}u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).