Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

On considère les points B $(100\,;100)$ et C$\left(50\,;\,\dfrac{50}{\sqrt{e}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée Γ , est donnée en annexe.
On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

1. pour tout x réel, $f(x) = xe^{ax+b}$.
2. les points B et C appartiennent à la courbe Γ .

1. **a.** $B(100;100) \in \Gamma \iff 100 = f(100) \iff 100 = 100\mathrm{e}^{100a+b} \iff 1 = \mathrm{e}^{100a+b} \iff 0 = 100a+b$

$\mathrm{C}\left(50\,;\,\dfrac{50}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) \iff \dfrac{50}{\sqrt{\mathrm{e}}} = f(50) \iff \dfrac{50}{\sqrt{\mathrm{e}}} = 50\mathrm{e}^{50a+b} \iff \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{50a+b} \iff 50a+b = -\dfrac{1}{2}$

Le couple $(a\,;\,b)$ est donc solution du système : $\begin{cases} 100a+b=0 \\ 50a+b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

b. $\begin{cases} 100a+b=0 \\ 50a+b=-\dfrac{1}{2}\end{cases} \iff \begin{cases} 100a+b=0 \\ 100a+2b=-1\end{cases} \iff \begin{cases} 100a+b=0 \\ b=-1\end{cases} \iff \begin{cases} 100a=1 \\ b=-1\end{cases} \iff \begin{cases} a=0,01 \\ b=-1\end{cases}$

Donc, pour tout x réel, $f(x) = x\mathrm{e}^{0,01x-1}$.

2. $\lim_{x\to+\infty} 0,01x-1 = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{y} = +\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{0,01x-1} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. **a.** Pour tout x réel, $f(x) = xe^{0,01x-1} = 100\times 0,01xe^{0,01x}e^{-1} = \dfrac{100}{e}\times 0,01xe^{0,01x}$

b. $\lim_{x\to-\infty} 0,01x = -\infty$ et $\lim_{y\to-\infty} ye^{y} = 0$ d'où $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel on a :
$f'(x) = 1\times e^{0,01x-1} + x\times 0,01e^{0,01x-1} = (1+0,01x)e^{0,01x-1}$

5. Pour tout x réel on a : $f(x)-x = x\left(e^{0,01x-1}-1\right)$.
Avec $e^{0,01x-1}-1 \geqslant 0 \iff e^{0,01x-1} \geqslant 1 \iff e^{0,01x-1} \geqslant e^{0} \iff 0,01x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 100$.
On peut donc établir le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		100		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathrm{e}^{0,01x-1}-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La courbe Γ est donc en dessus de la droite (D) sur $]-\infty\,;\,100]\cup]100\,;\,+\infty[$ et au dessous sur l'intervalle $]0\,;\,+100[$.

6. **a.** On souhaite obtenir $F'(x) = f(x) = x\mathrm{e}^{0,01x-1}$; pour cela, on dérive $F(x) = (c\,x+d)e^{0,01x}$:

$F'(x) = c\,e^{0,01x} + 0,01(c\,x+d)e^{0,01x} = (c+0,01d+0,01c\,x)e^{0,01x}$

Par identification avec $f(x) = x\mathrm{e}^{0,01x-1} = \dfrac{1}{e}\,x\,e^{0,01x}$, on obtient : $c+0,01\,d = 0$ et $0,01c = \dfrac{1}{e}$

Cela donne au final : $c = \dfrac{100}{e}$ et $d = -\dfrac{10\,000}{e}$

b. $\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{100}{e}\left[(x-100)e^{0,01x}\right]_0^{100} = \dfrac{100}{e}(0-(-100)) = \dfrac{10\,000}{e}$

c. La courbe Γ est donc en dessous de la droite (D) sur $[0;100]$ donc on a

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \int_0^{100} t-f(t)dt \\ &= \int_0^{100} t\,dt - \int_0^{100} f(t)dt \\ &= \left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^{100} - \dfrac{10\,000}{e} \\ &= 5\,000 - \dfrac{10\,000}{e} \\ &\simeq 1321 \end{aligned}$$