

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère les points B (100; 100) et C $(50; \frac{50}{\sqrt{e}})$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée Γ , est donnée en annexe.

On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

1. pour tout x réel, $f(x) = xe^{ax+b}$.
2. les points B et C appartiennent à la courbe Γ .

1. a. Montrer que le couple $(a; b)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- b. En déduire que, pour tout x réel, $f(x) = xe^{0,01x-1}$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. a. Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}$

- b. En déduire la limite de f en $-\infty$.

4. Étudier les variations de la fonction f . On donnera le tableau de variations complet.

5. Étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite (D).

6. a. Déterminer deux réels c et d pour que la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$F(x) = (cx + d)e^{0,01x} \text{ soit une primitive de } f \text{ sur } [0; +\infty[.$$

- b. En déduire $\int_0^{100} f(t) dt$.

- c. On désigne par A l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 100$, la droite (D) et la courbe Γ .

Calculer A.

Annexe de l'exercice 1

