*Les *quatre* trois questions sont indépendantes.*
Dans cet exercice, pour chaque question, une affirmation est proposée. On demande d'indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte, mais toute trace de recherche sera valorisée.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+t \\ y & = & 6+2t \\ z & = & 4-t \end{array}\right., \quad t\in\mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 8+5t' \\ y & = & 2-2t' \\ z & = & 6+t' \end{array}\right., \quad t'\in\mathbb{R}.$$

On cherche le point d'intersection éventuel $M(x;y;z)$ de ces deux droites :

$$\left\{\begin{array}{l} x=4+t=8+5t' \\ y=6+2t=2-2t' \\ z=4-t=6+t' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t-5t'=4 \\ 2t+2t'=-4 \\ -t-t'=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t-5t'=4 \\ t+t'=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6t'=-6 \\ t+t'=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=-1 \\ t'=-1 \end{array}\right.$$

Les deux droites ont donc comme point commun $M(4-1;6-2;4+1)=(3;4;5)$.
Affirmation : les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont coplanaires.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, on considère les points $A(12;7;-13)$ et $B(3;1;2)$ ainsi que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x+2y-5z=1$.
Le point $B(3;1;2)$ appartient au plan $\mathscr{P}$, car $3\times3+2\times1-5\times2=1$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\-6\\15\end{pmatrix}$ est colinéaire à un vecteur normal du plan : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{n}$.
Affirmation : le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

3. On considère la suite u définie par son premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2, \text{ pour tout entiernaturel } n.$$

Démonstration par récurrence :
– $u_0=1<3$
– Supposons que pour tout n, on ait : $u_n\leqslant3$

$$u_n\leqslant3 \Longrightarrow \frac{1}{3}u_n\leqslant1 \Longrightarrow u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2\leqslant3$$

– Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_n\leqslant3$
Affirmation : cette suite est majorée par 3.