

1. a. $\overrightarrow{AB}(2; -8; -2), \overrightarrow{AC}(3; 0; 1)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, dont les trois points distincts A, B et C définissent un plan.
- b. On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 - 8 + 6 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 - 3 = 0$.
Le vecteur \vec{n} orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est donc un vecteur normal au plan (ABC).
- c. On sait que $M(x; y; z) \in (ABC) \iff 1x + 1y - 3z + d = 0$. En particulier $C(2; 2; 2) \in (ABC) \iff 1 \times 2 + 1 \times 2 - 3 \times 2 + d = 0 \iff d = 2$.
Conclusion : $M(x; y; z) \in (ABC) \iff x + y - 3z + 2 = 0$.

2. a. Le vecteur $\vec{p}(1; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan (P).
Or \vec{n} et \vec{p} ne sont pas colinéaires, ce qui signifie que les plans (ABC) et P ne sont pas parallèles donc sécants.

$$b. M(x; y; z) \in D \iff M(x; y; z) \in \begin{cases} x + y - 3z + 2 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 3t - 2 \\ x - y = -t + 4 \\ z = t \end{cases} \quad (1) \Rightarrow$$

$$2x = 2t + 2 \iff x = t + 1.$$

$$\text{En remplaçant dans l'équation (1) } y = x + z - 4 = z + 1 + z - 4 = 2t - 3.$$

$$\text{Finalement : } M(x; y; z) \in D \iff \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \\ z = t \end{cases}$$

3. a. Le point de D correspondant à $t = 1$ est le point I.
- b. Calculons $\Omega I^2 = (2 - 3)^2 + (-1 - 1)^2 + (1 - 3)^2 = 1 + 4 + 4 = 9$, donc $\Omega I = 3$: le point I appartient à la sphère S.
- c. Un point $M(x; y; z)$ appartient à S si et seulement si $\Omega M^2 = 9 \iff (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$.

Un point $M(x; y; z)$ appartient à D et à S si et seulement si ses coordonnées vérifient les

$$\text{équations : } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = t \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(1 + t - 3)^2 + (-3 + 2t - 1)^2 + (t - 3)^2 = 9 \iff t^2 + 4 - 4t + 4t^2 + 16 - 16t + t^2 + 9 - 6t = 9 \iff 6t^2 - 26t + 20 = 0 \iff 3t^2 - 13t + 10 = 0.$$

On sait que I appartient à S donc $t = 1$ est une des des solutions de l'équation du second degré.

$$\text{Or } 3t^2 - 13t + 10 = (t - 1)(3t - 10); \text{ donc l'autre solution est donnée par } 3t - 10 = 0 \iff t = \frac{10}{3},$$

valeur du paramètre qui conduit à $J\left(\frac{13}{3}; \frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)$.