un exercice extrait du sujet Amérique du Nord mai 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. On a : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2u_0} = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2u_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$ et
$u_3 = \sqrt{2u_2} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 1.8340$ à 10^{-4} près

b. Cet algorithme permet le calcul du terme de rang n.

c. D'après le tableau des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n, on peut conjecturer que la suite est croissante et majorée par 2.

un exercice extrait du sujet Liban mai 2013

Partie A

1. L'algorithme n° 1 calcule tous les termes de v_0 à v_n mais n'affiche que le dernier v_n.
L'algorithme n° 2 calcule n fois de suite v_1 à partir de v_0 : il ne calcule pas les termes de 0 à v_n.
L'algorithme n° 3 calcule tous les termes de 0 à v_n et les affiche tous.
2. D'après les tables de valeurs de la suite (qui correspond en fait à $n = 9$), il semblerait que la suite soit croissante et converge vers un nombre proche de 3.
3. **a.** Montrons par récurrence la proprieété $P_n : 0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n.
Initialisation : $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie, puisque $v_0 = 1$; ainsi P_0 est vraie.
Hérédité : Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie.
On suppose donc que $0 < v_n < 3$.
Donc $6 = 6 - 0 > 6 - v_n > 6 - 3 = 3$, puis
$\frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3}$, car la fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
$\frac{3}{2}\frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} = 3$.
Ainsi $1 < \frac{3}{2} < v_{n+1} < 3$. L'hérédité est établie puisque P_{n+1} est vraie.
Conclusion
Par le principe de récurrence, $P_n : 0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n.

   b. $v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6 - v_n)}{6 - v_n} = \frac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n}$.
Or, d'après la question précédente, $0 < v_n < 3$ pour tout n entier naturel, ainsi $6 - v_n$ est positif, donc $v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n} > 0$, ainsi la suite (v_n) est croissante.

   c. Comme la suite est majorée par 3 et croissante, alors elle converge vers une limite inférieure ou égale à 3.

un exercice extrait du sujet Asie juin 2013

Partie A

1. *Initialisation* : la relation est vraie au rang 0 ;
Hérédité : supposons qu'il existe un naturel p tel que $u_p > 1$.
$\dfrac{1+3u_p}{3+u_p} = \dfrac{3+u_p-2+2u_p}{3+u_p} = \dfrac{\left(3+u_p\right)+\left(2u_p-2\right)}{3+u_p} = 1+2\dfrac{u_p-1}{3+u_p}$.
Par hypothèse de récurrence on a :
$u_p - 1$ et comme $u_p > 1, 3+u_p > 4 > 0$ donc son inverse $\dfrac{1}{3+u_p} > 0$ et finalement $\dfrac{u_p-1}{3+u_p} > 0$,
c'est-à-dire que $u_{p+1} = \dfrac{1+3u_p}{3+u_p} > 1$
Conclusion : on a démontré par récurrence que quel que soit le natureel n, $u_n > 1$.

2. **a.** Quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \dfrac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{1-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.
b. On sait que quel que soit le naturel n, $u_n > 1 \Rightarrow u_n^2 > 1^2 \Rightarrow 1-u_n^2 < 0$ et comme $3+u_n > 0$ et finalement $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers une limite supérieure ou égale à 1.

Partie B

1.

i	1	2	3
u	0,800	1,077	0,976

2. Il semble que la suite converge vers 1 par valeurs alternativement supérieures et inférieures.

3. **a.** $V_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}-1}{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}+1} = \dfrac{0,5-0,5u_n}{1,5+1,5u_n} = \dfrac{-0,5\,(u_n-1)}{1,5\,(u_n+1)} = -\dfrac{1}{3}v_n$.
La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
b. On a $v_0 = \dfrac{2-1}{2+3} = \dfrac{1}{3}$.
On sait qu'alors pour tout naturel n, $v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. **a.** Quel que soit le naturel n, $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 1$, donc $v_n \leqslant \dfrac{1}{3}$ et par conséquent $v_n \neq 1$.
b. $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1} \iff v_n\,(u_n+1) = u_n - 1 \iff v_n u_n + v_n = u_n - 1 \iff v_n u_n - u_n + = -1 - v_n \iff$
$u_n\,(v_n-1) = -1 - v_n$ et comme $v_n \neq 1$,
$u_n = \dfrac{}{-1-v_n} v_n - 1 = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.
c. Comme $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, donc d'après le résultat précédent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1} = 1$.