

un exercice extrait du sujet Amérique du Nord mai 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n : Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

- a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.
- b. Que permet de calculer cet algorithme ?
- c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n .

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

un exercice extrait du sujet Liban mai 2013

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n .

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
<p>Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels</p> <p>Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Afficher v</p> <p>Fin algorithme</p>	<p>Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels</p> <p>Début de l'algorithme : Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour</p> <p>Fin algorithme</p>	<p>Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels</p> <p>Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Afficher v</p> <p>Fin algorithme</p>

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714
---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.
- b.** Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.
 La suite (v_n) est-elle monotone ?
- c.** Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

un exercice extrait du sujet Asie juin 2013

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 1$.
2. **a.** Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.
b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
 En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\frac{1 + 0,5u}{0,5 + u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n .
4. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$.
b. montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .