Chapitre 3

Nombres entiers et rationnels

I divisibilité

I - 1) division euclidienne

a et b désignent deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.

Effectuer la **division euclidienne** de a par b signifie déterminer deux nombres entiers positifs q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ et } r < b$$

q s'appelle le et r le

exemple :

On a : $521 =$

Dans la division euclidienne de 521 par 4, le quotient entier est et le reste

I - 2) diviseurs d'un nombre entier

définition

a et b désignent deux nombres entiers positifs, avec $b \neq 0$.

On dit que b est un **diviseur** de a lorsqu'il existe un nombre entier positif n tel que :

exemple :

$48 = 6 \times 8$ donc 8 est un diviseur de 48.

Les diviseurs de 48 sont :

Pour établir cette liste, on peut utiliser cette méthode :

remarques :

* si b est un diviseur de a, alors le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

* si b est un diviseur de a, alors a est un **multiple** de b.

* on dit « *b est un **diviseur** de a* », ou « *b **divise** a* », ou « *a est **divisible** par b* ».

I - 3) critères de divisibilité

* si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4 ,6 ou 8, on dit qu'il est **pair** : il est alors **divisible par 2**.

* si un nombre entier a pour **chiffre des unités 0 ou 5**, alors il est **divisible par 5**.

* si la **somme des chiffres** d'un nombre entier est **divisible par 3**, alors ce nombre est divisible par 3.

* si la **somme des chiffres** d'un nombre entier est **divisible par 9**, alors ce nombre est divisible par 9.

exemples :

582

567

II le Plus Grand Diviseur Commun

II - 1) définition

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs.

Le plus grand des diviseurs communs à a et b s'appelle le

exemples :

Recherche du PGCD de 165 et de 66.
Les diviseurs de 165 et de 66 sont :

- Les diviseurs de 165 sont :
- Les diviseurs de 66 sont :
- Les diviseurs communs de 165 et 66 sont :

Conclusion : $\boxed{\text{PGCD } (165\,;\,66) = \quad}$

II - 2) PGCD : par l'algorithme des soustractions successives

propriété

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs, avec $a > b$.

$$PGCD(a;b) = PGCD(b;a-b)$$

Conséquence : algorithme des soustractions successives.

II - 3) PGCD : par l'algorithme d'Euclide

propriété

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs, avec $a > b$.

$$PGCD(a; b) = PGCD(b; r),$$

où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Conséquence : algorithme d'Euclide

exemple : PGCD (1755 ; 455)

remarque : dans l'algorithme d'Euclide, **le PGCD est le dernier reste non nul** (65 dans l'exemple).

III fraction irréductible

III - 1) nombres premiers entre eux

définition

Deux nombres sont dits

exemples :

- 3 et 20
- 1 et n'importe quel nombre

remarque :

Aucun calcul n'est nécessaire pour dire que 15 et 120

III - 2) fractions irréductibles

définition

> une fraction est

propriété

> Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont

exemples :

* $\frac{3}{20}$
* $\frac{15}{120}$

III - 3) rendre une fraction irréductible

propriété

> Si l'on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par

exemples : $\frac{165}{66} =$ $\frac{455}{1755} =$

remarque :

Les méthodes vues dans les classes précédentes sont parfois plus rapides : inutile de calculer le PGCD pour simplifier $\frac{125}{35}$:

$\frac{125}{35} =$