# Chapitre 6

# Inéquations - Système d'équations

## I inéquation du premier degré à une inconnue

### I - 1) effet d'une mulitplication ou d'une division sur une inégalité

**règles**

Si on mulitplie ou divise une inéquation par un nombre **strictement positif**, l'inégalité **reste la même**.

Si on mulitiplie ou divise une inéquation par un nombre **strictement négatif**, l'inégalité **change de sens**.

*exemples* :

$6 > 4$ : en multipliant par $+2$, on a : $12 > 8$ ; en divisant par 3, on a : $2 > \frac{3}{4}$.

$6 > 4$ : en multipliant par (-3), on a : $-18 < -12$ ; en divisant par (-6), on a : $-1 < \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$.

### I - 2) méthode de résolution d'une inéquation

Elle est identique à la méthode de résolution d'une équation : il faut juste **s'interroger si on a multiplié ou divisé l'inéquation par un nombre négatif**.

On va résoudre la même inéquation de deux manières différentes :

| | |
|---|---|
| $8x + 2 > 10x - 4$ | $8x + 2 > 10x - 4$ |
| $8x + 2 - 2 > 10x - 4 - 2$ | $8x - 8x + 2 > 10x - 4 - 8x$ |
| $8x - 10x > 10x - 10x - 6$ | $2 + 4 > 2x - 4 + 4$ |
| $-2x > -6$ | $6 > 2x$ |
| $\frac{-2x}{-2} < \frac{-6}{-2}$ | $\frac{6}{2} > \frac{2x}{2}$ |
| $x < 3$ | $3 > x$ |

*remarques* :

- A gauche, on a voulu isoler l'inconnue $x$ à gauche du signe « = ». Il a fallu changer le sens de l'inégalié au moment où on a divisé par (-2).

- A droite, on voulu isoler l'inconnue $x$ à droite du signe « = ». L'inégalité n'a pas changé de sens quand on a divisé par (+2).

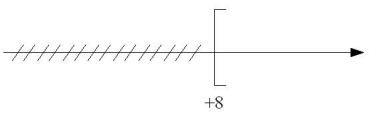
- « $x < 3$ »et « $3 > x$ »veulent dire la même chose.

## I - 3) représentation des solutions

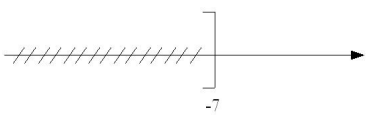
On représente les solutions sur **la droite graduée** et on va **hachurer les solutions**.

Ensuite, reste à savoir **si on prend ou non la valeur limite**, selon que l'inégalité est stricte ($>$ ou $<$) ou non ($\leq$ ou $\geq$).

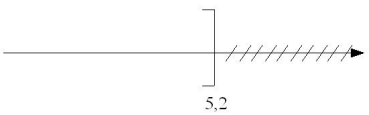
on représente : $x < 8$




on représente : $x \leq -7$




on représente : $x > 5,2$



# II Système de deux équations

## II - 1) définition

Voici un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 5x & + & 2y & = & 12 \\ -2x & + & y & = & -3 \end{cases}$$

Résoudre un tel système, c'est trouver **un couple** $(x;y)$ qui sera solution, c'est-à-dire que **les deux égalités sont vérifiées simultanément** quand on remplace $x$ et $y$ par les valeurs proposées.

Ici :

- le couple $(2\ ;\ 2)$ est-il solution ?
  $5\times 2+2\times 2=10+4=14\neq 12$ : ce n'est pas la peine de vérifier la seconde relation pour dire que $(2;\ 2)$ n'est pas solution du système.

- le couple $(4\ ;\ -4)$ est-il solution ?
  $5\times 4+2\times(-4)=20-8=12$
  et : $-2\times 4+(-4)=-8-4=-12\neq -3$ : $(4;\ -4)$ n'est pas solution du système.

- le couple $(2\ ;\ 1)$ est-il solution ?
  $5\times 2+2\times 1=10+2=12$
  et $-2\times 2+1=-4+1=-3$ : **$(2\ ;\ 1)$ est solution du système**.

## II - 2) interprétation graphique

Le système

$$\begin{cases} 5x+2y=12 \\ -2x+y=-3 \end{cases}$$

peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} y=-2,5x+6 \\ y=\ \ 2x-3 \end{cases}$$

On reconnaît l'équation de deux droites :

- $(D_1)$ d'équation : $y=-2,5x+6$,

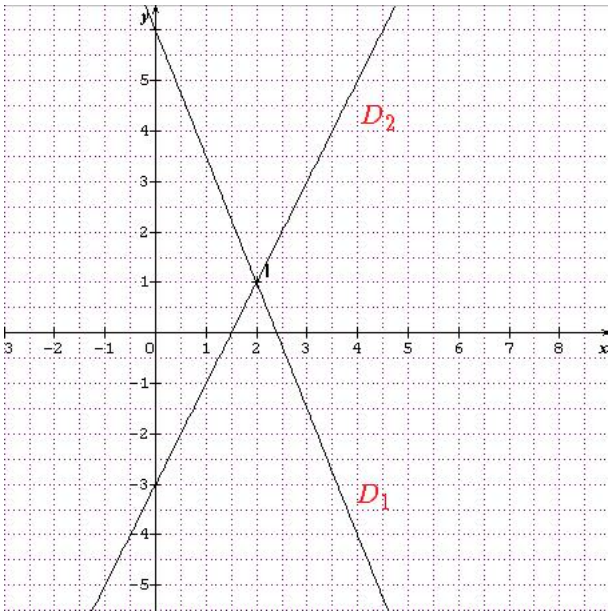
- $(D_2)$ d'équation : $y=2x-3$.

* Un point $M(x_M ; y_M)$ se trouve sur la droite $(D_1)$ si ses coordonnées vérifient :

$$y_M = -2,5 \times x_M + 6$$

* Un point $N(x_N ; y_N)$ se trouve sur la droite $(D_2)$ si ses coordonnées vérifient :

$$y_N = 2 \times x_N - 3$$




Un point $I(x ; y)$ se trouve à l'intersection des droites $(D_1)$ et $(D_2)$ s'il se trouve sur les deux à la fois, c'est-à-dire si ces coordonnées vérifient le système

$$\begin{cases} y = -2,5x + 6 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Ainsi, résoudre un système de deux équations à deux inconnues peut s'interpréter comme la recherche du point d'intersection de deux droites dans un repère.

Dans l'exemple précédent, le point d'intersection des droites $(D_1)$ et $(D_2)$ et le point **I de coordonnées (2 ; 1)** ; c'est bien cohérent avec la résolution du système faite précédemment.

# III résolution d'un système de deux équations à deux inconnues

## III - 1) résolution par substitution du système

Dans le système

$$\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

la seconde ligne peut aussi s'écrire : $y = 2x - 3$

On remplace alors $y$ par $2x - 3$ dans la première ligne du système :

$5x + 2y = 12$ devient : $5x + 2 \times (2x - 3) = 12$

On obtient une équation qui n'a qu'une seule inconnue $(x)$ :

$$\begin{aligned} 5x + 2 \times (2x - 3) &= 12 \\ 5x + 4x - 6 &= 12 \\ 9x &= 18 \\ x &= \frac{18}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Une fois qu'on a la valeur de l'inconnue $x$, il suffit de la reporter dans l'une des deux équations pour trouver la valeur de l'inconnue $y$.

On choisit ici de remplacer $x$ par 2 dans la seconde ligne du système :

$$\begin{aligned} -2\times 2+y &= -3\\ -4+y &= -3\\ y &= -3+4\\ y &= 1 \end{aligned}$$

**Conclusion** : $x=2$ et $y=1$, ce que l'on note : $\boxed{\text{S=(2 ;1)}}$.

## III - 2) résolution du système par combinaison linéaire

### a) multiplier ou diviser par un coefficient

**règle** :

> Dans un système, on a de droit de **multiplier ou de diviser une ligne** par un coefficent non nul.

*exemple* :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 12 & (L_1)\\ -2x + y = -3 & (L_2) \end{cases}$$

En multipliant la deuxième ligne par 2, on obtient :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 12 & (L_1)\\ -4x + 2y = -6 & (L_2)\leftarrow(2\times L_2) \end{cases}$$

> Le but de cette opération est d'avoir **le même coefficient devant l'une des deux inconnues**.

### b) soustraire deux lignes

**règle** :

> Dans un système, on a de droit de **remplacer une ligne par la différence des deux lignes**.

*exemple* : dans le système précédent, on remplace la seconde ligne par la différence des deux lignes :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 12 & (L_1)\\ 5x-(-4x) + 2y-2y = 12-(-6) & (L_2)\leftarrow(L_1)-(L_2) \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 12\\ 9x = 18 \end{cases}$$

Le but de cette opération est d'avoir une ligne qui soit **une équation à une inconnue** (que l'on sait résoudre).

On trouve la valeur de $x$ :

$$\begin{cases} 5x & + & 2y & = & 12 \\ x & & & = & 2 \end{cases}$$

### c) terminer la résolution du système

On **remplace** la valeur trouvée précédemment dans l'une des lignes du système du départ pour trouver la valeur de l'autre inconnue.

*exemple* : dans le système précédent, on remplace $x$ par 2 dans la première ligne du système de départ :

$$\begin{cases} 5 \times 2 & + & 2y & = & 12 \\ x & & & = & 2 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} & & 2y & = & 12 - 10 \\ x & & & = & 2 \end{cases}$$

et finalement :

$$\begin{cases} x{=}2 \\ y{=}1 \end{cases}$$

**Conclusion** : $x = 2$ et $y = 1$, ce que l'on note : $\boxed{\text{S}{=}(2\,;1)}$.

*Cette technique se fait en 3 étapes* :

1. **multiplier ou diviser une ou les deux lignes** par des coefficients bien choisis afin qu'une des deux inconnues ait le même coefficient,
2. **remplacer une ligne par la différence des deux lignes précédentes** pour obtenir une équation à une inconnue,
3. **remplacer dans le système de départ l'inconnue trouvée** précédemment pour trouver la valeur de l'autre inconnue.