

Chapitre 5

Equations et équations produit nul

I équation du premier degré à une inconnue

I - 1) activité

On cherche trois nombres entiers consécutifs qui ont pour somme 1266.

Méthode possible : faire des essais ... ça peut être un peu long !

On propose la méthode suivante : on note n le premier nombre cherché.

Le suivant sera $n + 1$, et le suivant de ce nombre $n + 2$.

La somme de ces trois nombres donne : $n + n + 1 + n + 2$ c'est-à-dire $3 \times n + 3$ que l'on note $3n + 3$.

On a établi une équation : $3n + 3 = 1266$.

I - 2) méthode de résolution d'une équation

Le but est d'isoler progressivement l'inconnue.

On pourra :

- additionner ou soustraire un nombre **de chaque côté** du signe « = »,
- multiplier ou diviser par un nombre (non nul) **de chaque côté** du signe « = ».

exemples :

$7x + 9 = 5x - 2$ $7x + 9 - 9 = 5x - 2 - 9$ $7x - 5x = 5x - 5x - 11$ $2x = -11$ $\frac{2x}{2} = \frac{-11}{2}$ $x = -\frac{11}{2}$	on cherche à n'avoir que des x à gauche : on va faire « -9 » de chaque côté on va faire $-5x$ de chaque côté on arrange $7x - 5x$ on veut faire éliminer le coefficient multiplicatif « $\times 2$ » placé devant x : on va diviser par deux de chaque côté reste à terminer ...
--	--

$5x - 9 = 6x - 2$ $5x + 9 + 9 = 6x - 2 + 9$ $5x - 6x = 6x - 6x + 7$ $-x = 7$ $\frac{-x}{-1} = \frac{7}{-1}$ $x = -7$	on cherche à n'avoir que des x à gauche : on va faire « +9 » de chaque côté on va faire $-6x$ de chaque côté on arrange $5x - 6x$ on veut faire éliminer le coefficient multiplicatif « $\times (-1)$ » placé devant x : on va diviser par (-1) de chaque côté reste à terminer ...
--	---

$\frac{2}{3}x - \frac{4}{5} = 6x + 4$ $\frac{2}{3}x - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 6x + 4 + \frac{4}{5}$ $\frac{2}{3}x - 6x = 6x - 6x + \frac{20}{5} + \frac{4}{5}$ $\frac{2}{3}x - \frac{18}{3}x = \frac{24}{5}$ $-\frac{16}{3}x = \frac{24}{5}$ $-\frac{16}{3}x \times -\frac{3}{16} = \frac{24}{5} \times -\frac{3}{16}$ $x = -\frac{8 \times 3 \times 3}{5 \times 8 \times 2} = -\frac{9}{10}$	on cherche à n'avoir que des x à gauche : on va faire « $+\frac{4}{5}$ » de chaque côté on va faire $-6x$ de chaque côté on arrange $\frac{2}{3}x - 6x$ on veut faire éliminer le coefficient multiplicatif « $\times (-\frac{16}{3})$ » placé devant x : on va diviser par $(-\frac{16}{3})$ de chaque côté, c'est-à-dire multiplier par $(-\frac{3}{16})$ de chaque côté reste à terminer ...
---	--

I - 3) résolution du problème

On résout le problème du paragraphe 1 en s'occupant de l'équation : $3n + 3 = 1266$

$$3n + 3 - 3 = 1266 - 3$$

$$3n = 1263$$

$$\frac{3n}{3} = \frac{1263}{3}$$

$$n = 421$$

Conclusion : les nombres cherchés sont : 421, 422 et 423.

II équation « produit nul »

II - 1) règle

Un produit est nul si **au moins** un des facteurs est nul.

Autre formulation : si $A \times B \times C = 0$, alors : $A = 0$ **ou** $B = 0$ **ou** $C = 0$.

II - 2) méthode

$(3x + 9)(5x - 1)(x + 7) = 0$ $3x + 9 = 0 \text{ ou } 5x - 1 = 0 \text{ ou } x + 7 = 0$ $3x = -9 \text{ ou } 5x = 1 \text{ ou } x = -3$ $x = \frac{-9}{3} \text{ ou } x = \frac{1}{5} \text{ ou } x = -7$ $x = -3 \text{ ou } x = \frac{1}{5} \text{ ou } x = -7$ <i>Conclusion</i> : les solutions sont $-3, \frac{1}{5}$ et -7 .	on a une forme factorisée : la garder ! on a des équations <i>classiques</i> à résoudre
---	---

II - 3) résolution de : $x^2 = a$

activité : on montre que résoudre l'équation $x^2 = 9$ revient à résoudre l'équation :

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

solution : $x^2 = 9$ revient à $x^2 - 9 = 0$, ce qui revient à $x^2 - 3^2 = 0$.

on reconnaît une différence de deux carrés : $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ et donc résoudre $x^2 = 9$ revient à résoudre $(x - 3)(x + 3) = 0$.

Or, $(x - 3)(x + 3) = 0$ est une équation produit qui a deux solutions : 3 et -3.

Bilan : l'équation $x^2 = 9$ a deux solutions : 3 et -3.

De manière plus générale :

Si a est un nombre positif, l'équation $x^2 = a$ admet **deux** solutions :

$$\sqrt{a} \text{ et } -\sqrt{a}$$

remarques :

- si a est négatif, il n'y a pas de solution à l'équation : aucun nombre mis au carré ne peut être égal à un nombre négatif.
- si a est égal à 0, il y a en fait une seule solution : 0.
- on peut faire le lien entre ce travail et la représentation graphique de la fonction : $f(x) = x^2$.

exemples :

- * $x^2 = -2$ n'admet aucune solution.
- * $x^2 = 15$ a pour solutions $\sqrt{15}$ et $-\sqrt{15}$.
- * $x^2 = 25$ a pour solutions 5 et -5.