Chapitre 4

Racine carrée

I racine carrée d'un nombre positif

I - 1) définition

a désigne un nombre positif.

La **racine carrée** de a est le nombre positif dont le carré est égal à a.

La racine carré de a se note $\sqrt{a}$.

On a : $\sqrt{a} \geq 0$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

remarque : le symbole $\sqrt{}$ est appelé *radical*.

exemples :

* $\sqrt{5}$ est la racine carrée de 5 : $(\sqrt{5})^2 = 5$

* $\sqrt{36}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 36. Comme $6^2 = 36$, et que $6 \geq 0$, on a : $\sqrt{36} = 6$

* on a $1^2 = 1$ et $1 \geq 0$ donc $\sqrt{1} = 1$

* on a $0^2 = 0$ et $0 \geq 0$ donc $\sqrt{0} = 0$

I - 2) valeur d'une racine carrée

deux cas de figures se présentent pour avoir une valeur d'une racine carrée :

1. on a la racine carrée d'un **carré parfait** : on en connaît alors **la valeur exacte**.

   exemples : $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ $\qquad$ $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$ $\qquad$ $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

   La liste des carrés parfaits est *à connaître* :

   1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144 ...

2. on a la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait : on peut en obtenir **une valeur approchée** grâce à un raisonnement ou grâce à la calculatrice.

   exemples :

   - $\sqrt{8}$? 8 n'est pas un carré parfait mais on sait que : $2^2 = 4$ et $3^2 = 9$: donc $2 < \sqrt{8} < 3$. Par la calculatrice, on trouve : $\sqrt{8} \approx 2,83$.

   - $\sqrt{120}$? 120 n'est pas un carré parfait mais on sait que : $11^2 = 121$; on se dit que $\sqrt{120}$ est légèrement inférieur à 11 ; par la calculatrice : $\sqrt{120} \approx 10,95$.

II règles de calcul

II - 1) racines carrées et multiplication

La racine carrée d'un produit est égal au produit des racines carrées.

Autrement dit, pour a et b deux nombres positifs,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

exemples :

$\sqrt{30} = \sqrt{3 \times 10} = \sqrt{3} \times \sqrt{10}$ ceci présente peu d'intérêt...

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ on a « simplifié »l'écriture en décomposant 20 en 4×5, **en faisant apparaître un carré parfait** ; décomposer 20 en 2×10 n'est pas faux mais est inutile.

$\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

II - 2) racines carrées et division

La racine carrée d'un quotient est égal au quotient des racines carrées.

Autrement dit, pour a et b deux nombres positifs (avec b non nul),

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

exemples :

$$\sqrt{\frac{32}{25}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{16 \times 2}}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

$$\sqrt{\frac{75}{8}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{25 \times 3}}{\sqrt{4 \times 2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

III différentes familles de nombres

Parmi tous les nombres, certains peuvent se mettre sous la forme d'une fraction : on les appelle les **nombres rationnels**.
On note l'ensemble de ces nombres $\mathbb{Q}$ *(la lettre « Q »pour « Quotient »).*

exemples :

* $5 \in \mathbb{Q}$: en effet, $5 = \dfrac{5}{1}$; plus généralement, tout nombre entier naturel ($\mathbb{N}$) est un nombre rationnel.
* $-8 \in \mathbb{Q}$: en effet, $-8 = \dfrac{-8}{1}$; plus généralement, tout nombre entier relatif ($\mathbb{Z}$) est un nombre rationnel.
* $12,14 \in \mathbb{Q}$: en effet, $12,14 = \dfrac{1214}{100}$; plus généralement, tout nombre décimal ($\mathbb{D}$) est un nombre rationnel.

$$\text{On note : } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

remarque : ça se lit : l'ensemble des nombres entiers naturels est inclu dans l'ensemble des nombres relatifs, lui même inclu dans l'ensemble des nombres décimaux, lui même inclu dans l'ensemble des nombres rationnels.

Certains nombres ne peuvent pas se mettre sous forme de fraction : on dit que ces nombres sont **irrationnels**.

Deux nombres irrationnels à connaître : $\sqrt{2}$ et π.