Chapitre 3

Nombres entiers et rationnels

I divisibilité

I - 1) division euclidienne

a et b désignent deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.

Effectuer la **division euclidienne** de a par b signifie déterminer deux nombres entiers positifs q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ et } r < b$$

q s'appelle le **quotient entier** et r le **reste**.

exemple :

On a : $521 = 4 \times 130 + 1$ (avec $1 < 4$)

Dans la division euclidienne de 521 par 4, le quotient entier est 130 et le reste 1.

5	2	1		4
1	2			130
	0	1		
		1		

I - 2) diviseurs d'un nombre entier

définition

a et b désignent deux nombres entiers positifs, avec $b \neq 0$.

On dit que b est un **diviseur** de a lorsqu'il existe un nombre entier positif n tel que : $a = n \times b$.

exemple :

$48 = 6 \times 8$ donc 8 est un diviseur de 48.

Les diviseurs de 48 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et 48.

Pour établir cette liste, on peut utiliser cette méthode :

1		48
2		24
3		16
4		12
6		8

remarques :

- * si b est un diviseur de a , alors le reste de la division euclidienne de a par b est nul.
- * si b est un diviseur de a , alors a est un **multiple** de b .
- * on dit « b est un **diviseur** de a », ou « b **divise** a », ou « a est **divisible** par b ».

I - 3) critères de divisibilité

- * si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8, on dit qu'il est **pair** : il est alors **divisible par 2**.
- * si un nombre entier a pour **chiffre des unités 0 ou 5**, alors il est **divisible par 5**.
- * si la **somme des chiffres** d'un nombre entier est **divisible par 3**, alors ce nombre est divisible par 3.
- * si la **somme des chiffres** d'un nombre entier est **divisible par 9**, alors ce nombre est divisible par 9.

exemples :

582

c'est un nombre pair (multiple de 2) ; ce n'est pas un multiple de 5.

$5 + 8 + 2 = 15$; 15 est un multiple de 3, mais pas un multiple de 9 donc 582 est un multiple de 3, mais n'est pas un multiple de 9.

567

567 n'est ni un multiple de 2, ni un multiple de 5.

$5 + 6 + 7 = 18$; 18 est un multiple de 9 donc 567 l'est aussi : $567 = 9 \times 63$ (c'est aussi un multiple de 3).

II le Plus Grand Diviseur Commun

II - 1) définition

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs.

Le plus grand des diviseurs communs à a et b s'appelle le **PGCD** (**P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur) des nombres a et b ; on le note $\text{PGCD}(a; b)$

exemples :

Recherche du PGCD de 165 et de 66.
Les diviseurs de 165 et de 66 sont :

1		165	1		66
3		55	2		33
5		33	3		22
11		15	6		11

- Les diviseurs de 165 sont : 1, 3, 5, 11, 15, 33, 55 et 165.
- Les diviseurs de 66 sont : 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33 et 66.
- Les diviseurs communs de 165 et 66 sont : 1, 3, 11 et 33.

Conclusion : $\text{PGCD}(165; 66) = 33$

II - 2) PGCD : par l'algorithme des soustractions successives propriété

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs, avec $a > b$.

$$\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; a - b)$$

Conséquence : algorithme des soustractions successives.

exemple : $\text{PGCD}(165; 66)$

$$\begin{array}{ll} 165 - 66 = 99 & \text{donc } \text{PGCD}(165; 66) = \text{PGCD}(99; 66) \\ 99 - 66 = 33 & \text{donc } \text{PGCD}(99; 66) = \text{PGCD}(66; 33) \\ 66 - 33 = 33 & \text{donc } \text{PGCD}(66; 33) = \text{PGCD}(33; 33) = 33 \end{array}$$

On retrouve bien le résultat précédent : $\text{PGCD}(165; 66) = 33$

II - 3) PGCD : par l'algorithme d'Euclide

propriété

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs, avec $a > b$.

$$PGCD(a; b) = PGCD(b; r),$$

où r est le reste de la division euclidienne de a par b .

Conséquence : algorithme d'Euclide

exemple : PGCD (1755; 455)

$$1755 = 455 \times 3 + 390$$

$$455 = 390 \times 1 + 65$$

$$390 = 65 \times 6 + 0$$

Conclusion : PGCD (1755; 455) = 65

remarque : dans l'algorithme d'Euclide, **le PGCD est le dernier reste non nul** (65 dans l'exemple).

III fraction irréductible

III - 1) nombres premiers entre eux

définition

Deux nombres sont dits **premiers entre eux** si leur PGCD est égal à 1.

exemples :

- 3 et 20 sont premiers entre eux.
- 1 et n'importe quel nombre sont premiers entre eux.

remarque :

Aucun calcul n'est nécessaire pour dire que 15 et 120 ne sont pas premiers entre eux ; en effet, 5 les divise tous les deux donc on est sûr que $PGCD(15; 120) > 1$.

III - 2) fractions irréductibles

définition

une fraction est **irréductible** lorsqu'elle ne peut plus être simplifiée.

propriété

Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, alors cette fraction est irréductible.

exemples :

* $\frac{3}{20}$ est irréductible.

* $\frac{15}{120}$ n'est pas irréductible : on peut au moins la simplifier par 5.

III - 3) rendre une fraction irréductible

propriété

Si l'on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par leur PGCD, alors la fraction obtenue est irréductible.

exemples :

$$\frac{165}{66} = \frac{33 \times 5}{33 \times 2} = \frac{5}{2} \qquad \frac{455}{1755} = \frac{65 \times 7}{65 \times 27} = \frac{7}{27}$$

remarque :

Les méthodes vues dans les classes précédentes sont parfois plus rapides : inutile de calculer le PGCD pour simplifier $\frac{125}{35}$:

$$\frac{125}{35} = \frac{5 \times 5 \times 5}{5 \times 7} = \frac{5 \times 5}{7} = \frac{25}{7}$$