Chapitre 2

Calcul littéral

I développement

« développer »une expression, c'est transformer un produit en une somme.

I - 1) distributivité

On a démontré en classe la formule suivante :

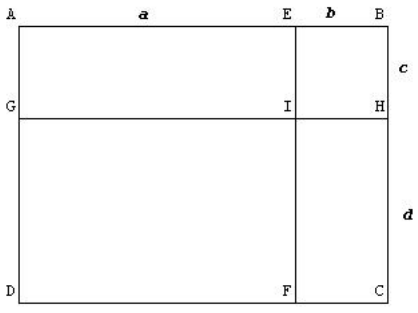
> Pour tout nombre a, b et k, on a :
>
> $$k \times (a+b) = ka + kb$$

exemples :

$15 \times 12 = 15 \times (10+2)$
$= 15 \times 10 + 15 \times 2$
$= 150 + 30 = 180$

$7(2x+5) = 7 \times 2x + 7 \times 5$
$= 14x + 35$

activité : on va cherche à exprimer l'aire du rectangle ABCD de deux manières différentes.



* D'une part :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = AB \times BC = (a+b) \times (c+d)$$

* D'autre part :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{AEIG} + \mathcal{A}_{EBHI} + \mathcal{A}_{IHCF} + \mathcal{A}_{GIFD},$$

ce qui donne : $\mathcal{A}_{ABCD} = ac + bc + bd + ad$

Ceci permet de donner la formule suivante (dite de « **la double distributivité** ») :

> Pour tout nombre a, b, c et d, on a :
>
> $$(a+b) \times (c+d) = ac + ad + bc + bd$$

exemples :

$$\begin{aligned} 32 \times 24 &= (30+2)(20+4) \\ &= 30 \times 20 + 30 \times 4 + 2 \times 20 + 2 \times 4 \\ &= 600 + 120 + 40 + 8 \\ &= 768 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+2)(2x-3) &= x \times 2x - x \times 3 + 2 \times 2x - 2 \times 3 \\ &= 2x^2 - 3x + 4x - 6 \\ &= 2x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

I - 2) produits remarquables

Les trois résultats qui suivent se démontrent géométriquement ou à partir de la double distributivité.

a) produit remarquable n°1

Pour tout nombre a et b,
$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$

exemples :

- $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

- $(5x+4)^2 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 4 + 4^2 = 25x^2 + 40x + 16$

- $\left(\frac{3}{2}x + 5\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + 2 \times \frac{3}{2}x \times 5 + 5^2 = \frac{9}{4}x^2 + 15x + 25$

remarques :

* $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$ s'écrit aussi : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

* le développement est composé de 3 termes : a^2, b^2 et $2ab$

* $2ab$ est appelé le **double produit**

b) produit remarquable n°2

Pour tout nombre a et b,
$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$$

exemples :

- $(x-3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

- $(5x-4)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 4 + 4^2 = 25x^2 - 40x + 16$

- $\left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2}x \times 5 + 5^2 = \frac{9}{4}x^2 - 15x + 25$

c) produit remarquable n°3

Pour tout nombre a et b,
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

exemples :

* $(x-3)(x+3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

* $(5x+4)(5x-4) = (5x)^2 - 4^2 = 25x^2 - 16$

* $\left(\frac{3}{2}x - 5\right)\left(\frac{3}{2}x + 5\right) = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 5^2 = \frac{9}{4}x^2 - 25$

II factorisation

« factoriser »une expression, c'est transformer une suite de sommes et de différences en un produit.
Le principe est d'utiliser les égalités vues pour le développement « dans l'autre sens ».

Méthode :

1. identifier si l'expression est **une différence de deux carrés**, du type $A^2 - B^2$,
2. si ce n'est pas le cas, chercher un **facteur commun**,
3. si on ne voit pas de facteur commun, reconnaître s'il s'agit d'une forme développée du type $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$,
4. si ce n'est pas le cas, il faut faire des transformations pour faire apparaître un facteur commun

exemple 1 :

Factoriser $4x^2 + 12x + 9$

Ce n'est pas la différence de deux carrés, pas de facteur commun évident ; on reconnaît trois termes, ça ressemble à : $a^2 + 2ab + b^2$.

$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$; $2x$ joue le rôle de a et 3 celui de b.

On obtient : $4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$.

exemple 2 :

Factoriser $25 - (x+1)^2$

On reconnaît la différence de deux carrés puisque $25 - (x+1)^2 = 5^2 - (x+1)^2$.
C'est du type $A^2 - B^2$, avec 5 pour A et $x+1$ pour B.

Cela donne :

$$\begin{aligned} 5^2-(x+1)^2 &= (5-(x+1))\,(5+(x+1)) \\ &= (5-x-1)(5+x+1) \\ &= (4-x)(6+x) \end{aligned}$$

exemple 3 :

Factoriser $(5x-2)(x+3)-(x+3)(2x-3)$

$(x+3)$ est un facteur commun :

$$\begin{aligned} (5x-2)(x+3)-(x+3)(2x-3) &= (x+3)\,((5x-2)-(2x-3)) \\ &= (x+3)\,(5x-2-2x+3) \\ &= (x+3)(3x+1) \end{aligned}$$

exemple 4 :

Factoriser $4x+4+(x+1)^2$

Ce n'est pas la différence de deux carrés, pas de facteur commun évident.

La piste $a^2+2ab+b^2$ qui a priori est intéressante n'aboutit pas ... Reste à faire une transformation pour faire apparaître un facteur commun :

$4x+4+(x+1)^2 = 4\times x+4\times 1+(x+1)^2 = 4\times(x+1)+(x+1)\times(x+1)$

$(x+1)$ apparaît alors comme facteur commun.

$$\begin{aligned} 4x+4+(x+1)^2 &= 4\times(x+1)+(x+1)\times(x+1) \\ &= (x+1)\,(4+(x+1)) \\ &= (x+1)(x+5) \end{aligned}$$