Chapitre 1

Calcul numérique

I écritures fractionnaires

I - 1) égalité des produits en croix

propriété :

a, b, c et d désignent quatre nombres relatifs, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

* si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors : $ad = bc$

* si $ad = bc$, alors : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

exemples :

$$* \frac{3}{5} = \frac{21}{35} \text{ revient à dire : } 3 \times 35 = 5 \times 21$$

$$* \frac{x}{5} = \frac{21}{35} \text{ revient à dire : } 35x = 5 \times 21 \text{ ce qui permet de trouver : } x = \frac{5 \times 21}{35} = \frac{5 \times 7 \times 3}{5 \times 7} = 3$$

I - 2) addition

règles :

* pour additionner deux nombres relatifs en écriture fractionnaire **de même dénominateur**, on additionne les **numérateurs** et on garde le **dénominateur** commun.

a, b, c désignent trois nombres relatifs, avec $c \neq 0$: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

exemples :

$$* -\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \quad * \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} - \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = \frac{3-4}{6} = -\frac{1}{6}$$

I - 3) multiplication

règle :

Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les **numérateurs entre eux** et les **dénominateurs entre eux**.

a, b, c, d désignent quatre nombres relatifs, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

exemples :

$$* \frac{3}{5} \times \frac{-7}{8} = \frac{3 \times (-7)}{5 \times 8} = -\frac{21}{40}$$

$$* \frac{15}{4} \times \frac{8}{25} = \frac{15 \times 8}{4 \times 25} = \frac{3 \times 5 \times 4 \times 2}{4 \times 5 \times 5} = \frac{6}{5}$$

I - 4) division

propriété :

Diviser un nombre non nul revient à multiplier par son inverse.

a, b , désignent deux nombres relatifs, avec $b \neq 0$:

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Cas particulier :

a, b, c, d désignent quatre nombres relatifs, avec $b \neq 0, c \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

exemples :

$$* \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{5}{5}} = -\frac{3}{8} \times \frac{1}{5} = -\frac{3}{40}$$

$$* \frac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{21}$$

II puissances d'un nombre relatif

II - 1) exposant entier positif

définition :

a est un nombre quelconque, n est un entier naturel non nul :
 a^n désigne le produit de n facteurs égaux à a :
$$a^n = a \times a \times \dots \times a \text{ (} n \text{ facteurs)}$$
 a^n est une puissance du nombre a est se lit : « a exposant n ».
 n s'appelle un **exposant**.

exemple :

3^4 est le produit de 4 facteurs égaux à 3 . Donc : $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

Cas particulier : $a^1 = a$

exemple : $5^1 = 5$

Convention : pour $a \neq 0$, on convient que : $a^0 = 1$

exemple : $7^0 = 1$

II - 2) exposant entier négatif

définition :

a est un nombre relatif non nul.
 n est un entier naturel non nul.
 a^{-n} désigne l'inverse de a^n : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

exemple :

2^{-3} est l'inverse de 2^3 .

$$\text{Donc, } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$$

Cas particulier : Pour $a \neq 0$, a^{-1} est l'inverse de a .

exemple : 5^{-1} est l'inverse de 5.
Donc $5^{-1} = \frac{1}{5}$

Attention !

$$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125 \text{ et } 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{125}$$

Donc $(-5)^3 \neq 5^{-3}$

II - 3) puissances de 10

propriété :

n désigne un nombre entier positif.

$$* 10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 10 \dots 0$$

n zéros

$$* 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10 \dots 0}_{n \text{ zéros}}} = 0, \underbrace{0 \dots 01}_{n \text{ chiffres}}_{\text{après la virgule}}$$

exemples :

$$* 10^4 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{4 \text{ facteurs}} = 10\,000$$

4 zéros

$$* 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{\underbrace{1\,000}_{3 \text{ zéros}}} = 0,001$$

3 chiffres
après la virgule

II - 4) écriture scientifique

définition :

L'**écriture scientifique** d'un nombre décimal est l'unique écriture de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle a est un nombre décimal qui possède **un seul chiffre avant sa virgule, ce chiffre étant non nul**, et n est un nombre entier relatif.

exemples :

* l'écriture scientifique de 76 800 000 est $7,68 \times 10^7$

* l'écriture scientifique de 0,000 064 est $6,4 \times 10^{-5}$

* 40×10^8 et $0,726 \times 10^{-5}$ ne sont pas des écritures scientifiques.

II - 5) calculer avec les puissances

règles :

a désigne un nombre relatif non nul.

n et p désignent deux nombres entiers relatifs.

$$* a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad * \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \qquad * (a^n)^p = a^{n \times p}$$

exemples :

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 \qquad \frac{7^4}{7^2} = 7^{4-2} = 7^2 \qquad ((-8)^2)^5 = (-8)^{2 \times 5} = (-8)^{10}$$
$$(-4)^{-5} \times (-4)^3 = (-4)^{-5+3} = (-4)^{-2} \qquad \frac{3^3}{3^{-5}} = 3^{3-(-5)} = 3^{3+5} = 3^8 \qquad (9^{-6})^3 = 9^{-6 \times 3} = 9^{-18}$$

règles :

a et b désignent deux nombres relatifs non nuls.

n désigne un nombre entier relatif.

$$* (ab)^n = a^n b^n \qquad * \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

exemples :

$$(3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2 \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$$
$$(-2x)^3 = (-2)^3 \times x^3 = -8x^3 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$$

Attention !

$$2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12 \text{ et } 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

$$\text{Donc : } 2^2 + 2^3 \neq 2^5$$

$2^2 + 2^3$ n'est pas une puissance de 2.