Table des matières

Première partie

Nombres et Calculs

Chapitre 1

Calcul numérique

I écritures fractionnaires

I - 1) égalité des produits en croix

propriété :

a, b, c et d désignent quatre nombres relatifs, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

* si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, alors : $ad = bc$ * si $ad = bc$, alors : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

exemples :

* $\dfrac{3}{5} = \dfrac{21}{35}$ revient à dire : $3 \times 35 = 5 \times 21$

* $\dfrac{x}{5} = \dfrac{21}{35}$ revient à dire : $35x = 5 \times 21$ ce qui permet de trouver : $x = \dfrac{5 \times 21}{35} = \dfrac{5 \times 7 \times 3}{5 \times 7} = 3$

I - 2) addition

règles :

* pour additionner deux nombres relatifs en écriture fractionnaire **de même dénominateur**, on additionne les **numérateurs** et on garde le **dénominateur** commun.

a, b, c désignent trois nombres relatifs, avec $c \neq 0$: $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$

exemples :

* $-\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1 \times 2}{2 \times 2} = \dfrac{1}{2}$ * $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1 \times 3}{2 \times 3} - \dfrac{2 \times 2}{3 \times 2} = \dfrac{3}{6} - \dfrac{4}{6} = \dfrac{3-4}{6} = -\dfrac{1}{6}$

I - 3) multiplication

règle :

Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les **numérateurs entre eux** et les **dénominateurs entre eux**.

a, b, c, d désignent quatre nombres relatifs, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

exemples :

* $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{-7}{8} = \dfrac{3 \times (-7)}{5 \times 8} = -\dfrac{21}{40}$

* $\dfrac{15}{4} \times \dfrac{8}{25} = \dfrac{15 \times 8}{4 \times 25} = \dfrac{3 \times 5 \times 4 \times 2}{4 \times 5 \times 5} = \dfrac{6}{5}$

I - 4) division

propriété :

Diviser un nombre non nul revient à multiplier par son inverse.

a, b, désignent deux nombres relatifs, avec $b \neq 0$:

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Cas particulier :

a, b, c, d désignent quatre nombres relatifs, avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

exemples :

* $\dfrac{-\frac{3}{8}}{5} = -\dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{5} = -\dfrac{3}{40}$

* $\dfrac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{5}{7} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{20}{21}$

II puissances d'un nombre relatif

II - 1) exposant entier positif

définition :

a est un nombre quelconque, n est un entier naturel non nul :
a^n désigne le produit de n facteurs égaux à a :

$$a^n = a \times a \times ... \times a \ (n \text{ facteurs})$$

a^n est une puissance du nombre a est se lit : « a *exposant* n ».
n s'appelle un **exposant**.

exemple :

3^4 est le produit de 4 facteurs égaux à 3 . Donc : $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

Cas particulier : $a^1 = a$ *exemple* : $5^1 = 5$

Convention : pour $a \neq 0$, on convient que : $a^0 = 1$ *exemple* : $7^0 = 1$

II - 2) exposant entier négatif

définition :

a est un nombre relatif non nul.
n est un entier naturel non nul.
a^{-n} désigne l'inverse de a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

exemple :

2^{-3} est l'inverse de 2^3.

Donc, $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{8}$

Cas particulier : Pour $a \neq 0$, a^{-1} est l'inverse de a .

exemple : 5^{-1} est l'inverse de 5.
Donc $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$

Attention !

$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$ et $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{5 \times 5 \times 5} = \dfrac{1}{125}$

Donc $(-5)^3 \neq 5^{-3}$

II - 3) puissances de 10

propriété :

n désigne un nombre entier positif.

$$* \ 10^n = \underbrace{10 \times 10 \times ... \times 10}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{10...0}_{n \text{ zéros}}$$

$$* \ 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10...0}_{n \text{ zéros}}} = \underbrace{0,0...01}_{\substack{n \text{ chiffres} \\ \text{après la virgule}}}$$

exemples :

$$* \ 10^4 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{4 \text{ facteurs}} = \underbrace{10\ 000}_{4 \text{ zéros}}$$

$$* \ 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{\underbrace{1\ 000}_{3 \text{ zéros}}} = \underbrace{0,001}_{\substack{3 \text{ chiffres} \\ \text{après la virgule}}}$$

II - 4) écriture scientifique

définition :

L'**écriture scientifique** d'un nombre décimal est l'unique écriture de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle a est un nombre décimal qui possède **un seul chiffre avant sa virgule**, **ce chiffre étant non nul**, et n est un nombre entier relatif.

exemples :

* l'écriture scientifique de 76 800 000 est $7,68 \times 10^7$

* l'écriture scientifique de 0,000 064 est $6,4 \times 10^{-5}$

* 40×10^8 et $0,726 \times 10^{-5}$ ne sont pas des écritures scientifiques.

II - 5) calculer avec les puissances

règles :

a désigne un nombre relatif non nul.
n et p désignent deux nombres entiers relatifs.

* $a^n \times a^p = a^{n+p}$ * $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ *$(a^n)^p = a^{n\times p}$

exemples :

$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ $\dfrac{7^4}{7^2} = 7^{4-2} = 7^2$ $((-8)^2)^5 = (-8)^{2\times 5} = (-8)^{10}$

$(-4)^{-5} \times (-4)^3 = (-4)^{-5+3} = (-4)^{-2}$ $\dfrac{3^3}{3^{-5}} = 3^{3-(-5)} = 3^{3+5} = 3^8$ $(9^{-6})^3 = 9^{-6\times 3} = 9^{-18}$

règles :

a et b désignent deux nombres relatifs non nuls.
n désigne un nombre entier relatif.

* $(ab)^n = a^n b^n$ * $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

exemples :

$(3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$ $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{3^3}{4^3} = \dfrac{27}{64}$

$(-2x)^3 = (-2)^3 \times x^3 = -8x^3$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1^5}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

Attention !

$2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12$ et $2^{2+3} = 2^5 = 32$ Donc : $2^2 + 2^3 \neq 2^5$
$2^2 + 2^3$ n'est pas une puissance de 2.

Chapitre 2

Calcul littéral

I développement

« développer »une expression, c'est transformer un produit en une somme.

I - 1) distributivité

On a démontré en classe la formule suivante :

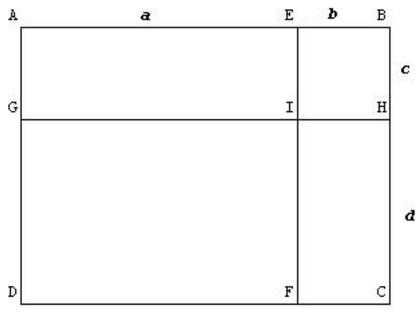
Pour tout nombre a, b et k, on a :

$$k \times (a + b) = ka + kb$$

exemples :

$$\begin{aligned} 15 \times 12 &= 15 \times (10 + 2) \\ &= 15 \times 10 + 15 \times 2 \\ &= 150 + 30 = 180 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 7(2x + 5) &= 7 \times 2x + 7 \times 5 \\ &= 14x + 35 \end{aligned}$$

activité : on va cherche à exprimer l'aire du rectangle ABCD de deux manières différentes.



* D'une part :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = AB \times BC = (a + b) \times (c + d)$$

* D'autre part :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{AEIG} + \mathcal{A}_{EBHI} + \mathcal{A}_{IHCF} + \mathcal{A}_{GIFD},$$

ce qui donne : $\mathcal{A}_{ABCD} = ac + bc + bd + ad$

Ceci permet de donner la formule suivante (dite de « **la double distributivité** ») :

Pour tout nombre a, b, c et d, on a :

$$(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

exemples :

$$\begin{aligned} 32 \times 24 &= (30+2)(20+4) \\ &= 30 \times 20 + 30 \times 4 + 2 \times 20 + 2 \times 4 \\ &= 600 + 120 + 40 + 8 \\ &= 768 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+2)(2x-3) &= x \times 2x - x \times 3 + 2 \times 2x - 2 \times 3 \\ &= 2x^2 - 3x + 4x - 6 \\ &= 2x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

I - 2) produits remarquables

Les trois résultats qui suivent se démontrent géométriquement ou à partir de la double distributivité.

a) produit remarquable n°1

Pour tout nombre a et b,
$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$

exemples :

- $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- $(5x+4)^2 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 4 + 4^2 = 25x^2 + 40x + 16$
- $\left(\frac{3}{2}x + 5\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + 2 \times \frac{3}{2}x \times 5 + 5^2 = \frac{9}{4}x^2 + 15x + 25$

remarques :

* $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$ s'écrit aussi : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

* le développement est composé de 3 termes : a^2, b^2 et $2ab$

* $2ab$ est appelé le **double produit**

b) produit remarquable n°2

Pour tout nombre a et b,
$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$$

exemples :

- $(x-3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$
- $(5x-4)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 4 + 4^2 = 25x^2 - 40x + 16$
- $\left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2}x \times 5 + 5^2 = \frac{9}{4}x^2 - 15x + 25$

c) produit remarquable n°3

Pour tout nombre a et b,
$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

exemples :

* $(x-3)(x+3)=x^2-3^2=x^2-9$

* $(5x+4)(5x-4)=(5x)^2-4^2=25x^2-16$

* $\left(\frac{3}{2}x-5\right)\left(\frac{3}{2}x+5\right)=\left(\frac{3}{2}x\right)^2-5^2=\frac{9}{4}x^2-25$

II factorisation

« factoriser »une expression, c'est transformer une suite de sommes et de différences en un produit.
Le principe est d'utiliser les égalités vues pour le développement « dans l'autre sens ».

Méthode :

1. identifier si l'expression est **une différence de deux carrés**, du type A^2-B^2 ,
2. si ce n'est pas le cas, chercher un **facteur commun**,
3. si on ne voit pas de facteur commun, reconnaître s'il s'agit d'une forme développée du type $a^2+2ab+b^2$ ou $a^2-2ab+b^2$,
4. si ce n'est pas le cas, il faut faire des transformations pour faire apparaître un facteur commun

exemple 1 :

Factoriser $4x^2+12x+9$

Ce n'est pas la différence de deux carrés, pas de facteur commun évident ; on reconnaît trois termes, ça ressemble à : $a^2+2ab+b^2$.

$4x^2+12x+9=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2$; $2x$ joue le rôle de a et 3 celui de b.

On obtient : $4x^2+12x+9=(2x+3)^2$.

exemple 2 :

Factoriser $25-(x+1)^2$

On reconnaît la différence de deux carrés puisque $25-(x+1)^2=5^2-(x+1)^2$.
C'est du type A^2-B^2, avec 5 pour A et $x+1$ pour B.

Cela donne :

$$\begin{aligned} 5^2-(x+1)^2 &= (5-(x+1))\,(5+(x+1)) \\ &= (5-x-1)(5+x+1) \\ &= (4-x)(6+x) \end{aligned}$$

exemple 3 :

Factoriser $(5x-2)(x+3)-(x+3)(2x-3)$

$(x+3)$ est un facteur commun :

$$\begin{aligned} (5x-2)(x+3)-(x+3)(2x-3) &= (x+3)\,((5x-2)-(2x-3)) \\ &= (x+3)\,(5x-2-2x+3) \\ &= (x+3)(3x+1) \end{aligned}$$

exemple 4 :

Factoriser $4x+4+(x+1)^2$

Ce n'est pas la différence de deux carrés, pas de facteur commun évident.

La piste $a^2+2ab+b^2$ qui a priori est intéressante n'aboutit pas ... Reste à faire une transformation pour faire apparaître un facteur commun :

$4x+4+(x+1)^2 = 4\times x+4\times 1+(x+1)^2 = 4\times(x+1)+(x+1)\times(x+1)$

$(x+1)$ apparaît alors comme facteur commun.

$$\begin{aligned} 4x+4+(x+1)^2 &= 4\times(x+1)+(x+1)\times(x+1) \\ &= (x+1)\,(4+(x+1)) \\ &= (x+1)(x+5) \end{aligned}$$

Chapitre 3

Nombres entiers et rationnels

I divisibilité

I - 1) division euclidienne

a et b désignent deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.

Effectuer la **division euclidienne** de a par b signifie déterminer deux nombres entiers positifs q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ et } r < b$$

q s'appelle le **quotient entier** et r le **reste**.

exemple :

On a : $521 = 4 \times 130 + 1$ *(avec $1 < 4$)*

Dans la division euclidienne de 521 par 4, le quotient entier est 130 et le reste 1.

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 4 \\ \cline{4-4} 1 & 2 & & 130 \\ & 0 & 1 & \\ & & 1 & \end{array}$$

I - 2) diviseurs d'un nombre entier

définition

a et b désignent deux nombres entiers positifs, avec $b \neq 0$.

On dit que b est un **diviseur** de a lorsqu'il existe un nombre entier positif n tel que : $a = n \times b$.

exemple :

$48 = 6 \times 8$ donc 8 est un diviseur de 48.

Les diviseurs de 48 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 et 48.

Pour établir cette liste, on peut utiliser cette méthode :

$$\begin{array}{c|c} 1 & 48 \\ 2 & 24 \\ 3 & 16 \\ 4 & 12 \\ 6 & 8 \end{array}$$

remarques :

* si b est un diviseur de a, alors le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

* si b est un diviseur de a, alors a est un **multiple** de b.

* on dit « *b est un **diviseur** de a* », ou « *b **divise** a* », ou « *a est **divisible** par b* ».

I - 3) critères de divisibilité

* si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4 ,6 ou 8, on dit qu'il est **pair** : il est alors **divisible par 2**.

* si un nombre entier a pour **chiffre des unités 0 ou 5**, alors il est **divisible par 5**.

* si la **somme des chiffres** d'un nombre entier est **divisible par 3**, alors ce nombre est divisible par 3.

* si la **somme des chiffres** d'un nombre entier est **divisible par 9**, alors ce nombre est divisible par 9.

exemples :

582

c'est un nombre pair (multiple de 2) ; ce n'est pas un multiple de 5.

$5 + 8 + 2 = 15$; 15 est un multiple de 3, mais pas un multiple de 9 donc 582 est un multiple de 3, mais n'est pas un multiple de 9.

567

567 n'est ni un multiple de 2, ni un multiple de 5.

$5 + 6 + 7 = 18$; 18 est un multiple de 9 donc 567 l'est aussi : $567 = 9 \times 63$ (c'est aussi un multiple de 3).

II le Plus Grand Diviseur Commun

II - 1) définition

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs.

Le plus grand des diviseurs communs à a et b s'appelle le **PGCD** (**P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur) des nombres a et b ; on le note PGCD(a ;b)

exemples :

Recherche du PGCD de 165 et de 66.
Les diviseurs de 165 et de 66 sont :

1	165
3	55
5	33
11	15

1	66
2	33
3	22
6	11

- Les diviseurs de 165 sont : 1, 3, 5, 11, 15, 33, 55 et 165.
- Les diviseurs de 66 sont : 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33 et 66.
- Les diviseurs communs de 165 et 66 sont : 1, 3, 11 et 33.

Conclusion : $\boxed{\text{PGCD } (165\,;\,66) = 33}$

II - 2) PGCD : par l'algorithme des soustractions successives

propriété

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs, avec $a > b$.

$$PGCD(a;b) = PGCD(b;a-b)$$

Conséquence : algorithme des soustractions successives.

exemple : PGCD (165 ; 66)

$165 - 66 = 99$ donc PGCD(165 ; 66) = PGCD(99 ; 66)
$99 - 66 = 33$ donc PGCD(99 ; 66) = PGCD(66 ; 33)
$66 - 33 = 33$ donc PGCD(66 ; 33) = PGCD(33 ; 33) = 33

On retrouve bien le résultat précédent : $\boxed{\text{PGCD}(165\,;\,66) = 33}$

II - 3) PGCD : par l'algorithme d'Euclide

propriété

a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs, avec $a > b$.

$$PGCD(a;b) = PGCD(b;r),$$

où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Conséquence : algorithme d'Euclide

exemple : PGCD (1755 ; 455)

$1755 = 455 \times 3 + 390$
$455 = 390 \times 1 + 65$
$390 = 65 \times 6 + 0$

Conclusion : $\boxed{\text{PGCD } (1755\,;\,455) = 65}$

remarque : dans l'algorithme d'Euclide, **le PGCD est le dernier reste non nul** (65 dans l'exemple).

III fraction irréductible

III - 1) nombres premiers entre eux

définition

Deux nombres sont dits **premiers entre eux** si leur PGCD est égal à 1.

exemples :

- 3 et 20 sont premiers entre eux.
- 1 et n'importe quel nombre sont premiers entre eux.

remarque :

Aucun calcul n'est nécessaire pour dire que 15 et 120 ne sont pas premiers entre eux ; en effet, 5 les divise tous les deux donc on est sûr que PGCD(15 ; 120) $>$ 1.

III - 2) fractions irréductibles

définition

> une fraction est **irréductible** lorsqu'elle ne peut plus être simplifiée.

propriété

> Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, alors cette fraction est irréductible.

exemples :

* $\dfrac{3}{20}$ est irréductible.
* $\dfrac{15}{120}$ n'est pas irréductible : on peut au moins la simplifier par 5.

III - 3) rendre une fraction irréductible

propriété

> Si l'on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par leur PGCD, alors la fraction obtenue est irréductible.

exemples : $\dfrac{165}{66} = \dfrac{33 \times 5}{33 \times 2} = \dfrac{5}{2}$ $\qquad \dfrac{455}{1755} = \dfrac{65 \times 7}{65 \times 27} = \dfrac{7}{27}$

remarque :

Les méthodes vues dans les classes précédentes sont parfois plus rapides : inutile de calculer le PGCD pour simplifier $\dfrac{125}{35}$:

$$\frac{125}{35} = \frac{5 \times 5 \times 5}{5 \times 7} = \frac{5 \times 5}{7} = \frac{25}{7}$$

Chapitre 4

Racine carrée

I racine carrée d'un nombre positif

I - 1) définition

a désigne un nombre positif.

La **racine carrée** de a est le nombre positif dont le carré est égal à a.

La racine carré de a se note $\sqrt{a}$.

On a : $\sqrt{a} \geq 0$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

remarque : le symbole $\sqrt{}$ est appelé *radical*.

exemples :

* $\sqrt{5}$ est la racine carrée de 5 : $(\sqrt{5})^2 = 5$

* $\sqrt{36}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 36. Comme $6^2 = 36$, et que $6 \geq 0$, on a : $\sqrt{36} = 6$

* on a $1^2 = 1$ et $1 \geq 0$ donc $\sqrt{1} = 1$

* on a $0^2 = 0$ et $0 \geq 0$ donc $\sqrt{0} = 0$

I - 2) valeur d'une racine carrée

deux cas de figures se présentent pour avoir une valeur d'une racine carrée :

1. on a la racine carrée d'un **carré parfait** : on en connaît alors **la valeur exacte**.

   exemples : $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ $\quad$ $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$ $\quad$ $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

   La liste des carrés parfaits est *à connaître* :

   1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144 ...

2. on a la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait : on peut en obtenir **une valeur approchée** grâce à un raisonnement ou grâce à la calculatrice.

   exemples :

   - $\sqrt{8}$? 8 n'est pas un carré parfait mais on sait que : $2^2 = 4$ et $3^2 = 9$: donc $2 < \sqrt{8} < 3$. Par la calculatrice, on trouve : $\sqrt{8} \approx 2,83$.

   - $\sqrt{120}$? 120 n'est pas un carré parfait mais on sait que : $11^2 = 121$; on se dit que $\sqrt{120}$ est légèrement inférieur à 11 ; par la calculatrice : $\sqrt{120} \approx 10,95$.

II règles de calcul

II - 1) racines carrées et multiplication

La racine carrée d'un produit est égal au produit des racines carrées.

Autrement dit, pour a et b deux nombres positifs,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

exemples :

$\sqrt{30} = \sqrt{3 \times 10} = \sqrt{3} \times \sqrt{10}$ ceci présente peu d'intérêt...

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ on a « simplifié »l'écriture en décomposant 20 en 4×5, **en faisant apparaître un carré parfait** ; décomposer 20 en 2×10 n'est pas faux mais est inutile.

$\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

II - 2) racines carrées et division

La racine carrée d'un quotient est égal au quotient des racines carrées.

Autrement dit, pour a et b deux nombres positifs (avec b non nul),

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

exemples :

$$\sqrt{\frac{32}{25}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{16 \times 2}}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

$$\sqrt{\frac{75}{8}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{25 \times 3}}{\sqrt{4 \times 2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

III différentes familles de nombres

Parmi tous les nombres, certains peuvent se mettre sous la forme d'une fraction : on les appelle les **nombres rationnels**.
On note l'ensemble de ces nombres $\mathbb{Q}$ *(la lettre « Q »pour « Quotient »).*

exemples :
* $5 \in \mathbb{Q}$: en effet, $5 = \dfrac{5}{1}$; plus généralement, tout nombre entier naturel ($\mathbb{N}$) est un nombre rationnel.
* $-8 \in \mathbb{Q}$: en effet, $-8 = \dfrac{-8}{1}$; plus généralement, tout nombre entier relatif ($\mathbb{Z}$) est un nombre rationnel.
* $12,14 \in \mathbb{Q}$: en effet, $12,14 = \dfrac{1214}{100}$; plus généralement, tout nombre décimal ($\mathbb{D}$) est un nombre rationnel.

$$\text{On note : } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

remarque : ça se lit : l'ensemble des nombres entiers naturels est inclu dans l'ensemble des nombres relatifs, lui même inclu dans l'ensemble des nombres décimaux, lui même inclu dans l'ensemble des nombres rationnels.

Certains nombres ne peuvent pas se mettre sous forme de fraction : on dit que ces nombres sont **irrationnels**.

Deux nombres irrationnels à connaître : $\sqrt{2}$ et π.

Chapitre 5

Equations et équations produit nul

I   équation du premier degré à une inconnue

I - 1)   activité

On cherche trois nombres entiers consécutifs qui ont pour somme 1266.

Méthode possible : faire des essais ... ça peut être un peu long !

On propose la méthode suivante : on note n le premier nombre cherché.
Le suivant sera $n+1$, et le suivant de ce nombre $n+2$.
La somme de ces trois nombres donne : $n+n+1+n+2$ c'est-à-dire $3\times n+3$ que l'on note $3n+3$.

On a établi une équation : $\boxed{3n+3=1266}$.

I - 2)   méthode de résolution d'une équation

Le but est d'isoler progressivement l'inconnue.

On pourra :
- additionner ou soustraire un nombre **de chaque côté** du signe « = »,
- mulitiplier ou diviser par un nombre (non nul) **de chaque côté** du signe « = ».

exemples :

$7x+9=5x-2$ $7x+9-9=5x-2-9$ $7x-5x=5x-5x-11$ $2x=-11$ $\dfrac{2x}{2}=\dfrac{-11}{2}$ $x=-\dfrac{11}{2}$	on cherche à n'avoir que des x à gauche : on va faire « -9 »de chaque côté on va faire $-5x$ de chaque côté on arrange $7x-5x$ on veut faire éliminer le **coefficient mulitipicatif** « $\times 2$ »placé devant x : on va **diviser par deux** de chaque côté reste à terminer ...

$5x-9=6x-2$ $5x+9+9=6x-2+9$ $5x-6x=6x-6x+7$ $-x=7$ $\dfrac{-x}{-1}=\dfrac{7}{-1}$ $x=-7$	on cherche à n'avoir que des x à gauche : on va faire « $+9$ »de chaque côté on va faire $-6x$ de chaque côté on arrange $5x-6x$ on veut faire éliminer le **coefficient mulitipicatif** « $\times(-1)$ »placé devant x : on va **diviser par (-1)** de chaque côté reste à terminer ...

$\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{5}=6x+4$ $\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{5}=6x+4+\dfrac{4}{5}$ $\dfrac{2}{3}x-6x=6x-6x+\dfrac{20}{5}+\dfrac{4}{5}$ $\dfrac{2}{3}x-\dfrac{18}{3}x=\dfrac{24}{5}$ $-\dfrac{16}{3}x=\dfrac{24}{5}$ $-\dfrac{16}{3}x\times-\dfrac{3}{16}=\dfrac{24}{5}\times-\dfrac{3}{16}$ $x=-\dfrac{8\times3\times3}{5\times8\times2}=-\dfrac{9}{10}$	on cherche à n'avoir que des x à gauche : on va faire « $+\dfrac{4}{5}$ »de chaque côté on va faire $-6x$ de chaque côté on arrange $\dfrac{2}{3}x-6x$ on veut faire éliminer le **coefficient mulitipicatif** « $\times(-\dfrac{16}{3})$ »placé devant x : on va **diviser** par $(-\dfrac{16}{3})$ de chaque côté, c'est-à-dire **mulitplier** par $(-\dfrac{3}{16})$ de chaque côté reste à terminer ...

I - 3) résolution du problème

On résout le problème du paragraphe 1 en s'occupant de l'équation : $3n + 3 = 1266$

$$\begin{aligned} 3n + 3 - 3 &= 1266 - 3 \\ 3n &= 1263 \\ \frac{3n}{3} &= \frac{1263}{3} \\ n &= 421 \end{aligned}$$

Conclusion : les nombres cherchés sont : 421, 422 et 423.

II équation « produit nul »

II - 1) règle

Un produit est nul si **au moins** un des facteurs est nul.

Autre formulation : si $A \times B \times C = 0$, alors : $A = 0$ **ou** $B = 0$ **ou** $C = 0$.

II - 2) méthode

$(3x + 9)(5x - 1)(x + 7) = 0$	on a une forme **factorisée** : **la garder** !
$3x + 9 = 0$ ou $5x - 1 = 0$ ou $x + 7 = 0$ $3x = -9$ ou $5x = 1$ ou $x = -3$ $x = \frac{-9}{3}$ ou $x = \frac{1}{5}$ ou $x = -7$ $x = -3$ ou $x = \frac{1}{5}$ ou $x = -7$ *Conclusion* : **les** solutions sont -3, $\frac{1}{5}$ et -7.	on a des équations *classiques* à résoudre

II - 3) résolution de : $x^2 = a$

activité : on montre que la résoudre l'équation $x^2 = 9$ revient à résoudre l'équation :

$$(x-3)(x+3) = 0$$

solution : $x^2 = 9$ revient à $x^2 - 9 = 0$, ce qui revient à $x^2 - 3^2 = 0$.
on reconnaît une différence de deux carrés : $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ et donc résoudre $x^2 = 9$ revient à résoudre $(x-3)(x+3) = 0$.

Or, $(x-3)(x+3) = 0$ est une équation produit qui a deux solutions : 3 et -3.

Bilan : l'équation $x^2 = 9$ a deux solutions : 3 et -3.

De manière plus générale :

> Si a est un nombre positif, l'équation $x^2 = a$ admet **deux** solutions :
>
> $$\sqrt{a} \text{ et } -\sqrt{a}$$

remarques :

- si a est négatif, il n'y a pas de solution à l'équation : aucun nombre mis au carré ne peut être égal à un nombre négatif.
- si a est égal à 0, il y a en fait une seule solution : 0.
- on peut faire le lien entre ce travail et la représentation graphique de la fonction : $f(x) = x^2$.

exemples :

* $x^2 = -2$ n'admet aucune solution.
* $x^2 = 15$ a pour solutions $\sqrt{15}$ et $-\sqrt{15}$.
* $x^2 = 25$ a pour solutions 5 et -5.

Chapitre 6

Inéquations - Système d'équations

I inéquation du premier degré à une inconnue

I - 1) effet d'une mulitplication ou d'une division sur une inégalité

règles

Si on mulitplie ou divise une inéquation par un nombre **strictement positif**, l'inégalité **reste la même**.

Si on mulitiplie ou divise une inéquation par un nombre **strictement négatif**, l'inégalité **change de sens**.

exemples :

$6 > 4$: en multipliant par $+2$, on a : $12 > 8$; en divisant par 3, on a : $2 > \frac{3}{4}$.

$6 > 4$: en multipliant par (-3), on a : -18 $<$ -12 ; en divisant par (-6), on a : -1 $< \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$.

I - 2) méthode de résolution d'une inéquation

Elle est identique à la méthode de résolution d'une équation : il faut juste **s'interroger si on a multiplié ou divisé l'inéquation par un nombre négatif**.

On va résoudre la même inéquation de deux manières différentes :

$8x + 2 > 10x - 4$	$8x + 2 > 10x - 4$
$8x + 2 - 2 > 10x - 4 - 2$	$8x - 8x + 2 > 10x - 4 - 8x$
$8x - 10x > 10x - 10x - 6$	$2 + 4 > 2x - 4 + 4$
$-2x > -6$	$6 > 2x$
$\dfrac{-2x}{-2} < \dfrac{-6}{-2}$	$\dfrac{6}{2} > \dfrac{2x}{2}$
$x < 3$	$3 > x$

remarques :

- A gauche, on a voulu isoler l'inconnue x à gauche du signe « $=$ ». Il a fallu changer le sens de l'inégalié au moment où on a divisé par (-2).

- A droite, on voulu isoler l'inconnue x à droite du signe « $=$ ». L'inégalité n'a pas changé de sens quand on a divisé par $(+2)$.

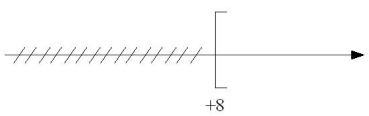
- « $x < 3$ »et « $3 > x$ »veulent dire la même chose.

I - 3) représentation des solutions

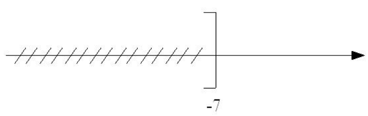
On représente les solutions sur **la droite graduée** et on va **hachurer les solutions**.

Ensuite, reste à savoir **si on prend ou non la valeur limite**, selon que l'inégalité est stricte ($>$ ou $<$) ou non ($\leq$ ou $\geq$).

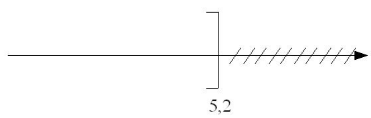
on représente : $x < 8$



on représente : $x \leq -7$



on représente : $x > 5,2$



II Système de deux équations

II - 1) définition

Voici un système de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 2y & = & 12 \\ -2x & + & y & = & -3 \end{array}\right.$$

Résoudre un tel système, c'est trouver **un couple** $(x;y)$ qui sera solution, c'est-à-dire que **les deux égalités sont vérifiées simultanément** quand on remplace x et y par les valeurs proposées.

Ici :

- le couple (2 ; 2) est-il solution ?
  $5\times 2+2\times 2=10+4=14\neq 12$: ce n'est pas la peine de vérifier la seconde relation pour dire que (2 ; 2) n'est pas solution du système.

- le couple (4 ; -4) est-il solution ?
  $5\times 4+2\times(-4)=20-8=12$
  et : $-2\times 4+(-4)=-8-4=-12\neq -3$: (4 ; -4) n'est pas solution du système.

- le couple (2 ; 1) est-il solution ?
  $5\times 2+2\times 1=10+2=12$
  et $-2\times 2+1=-4+1=-3$: **(2 ; 1) est solution du système**.

II - 2) interprétation graphique

Le système

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+2y=12 \\ -2x+y=-3 \end{array}\right.$$

peut aussi s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{l} y=-2,5x+6 \\ y=\quad 2x-3 \end{array}\right.$$

On reconnaît l'équation de deux droites :

- (D_1) d'équation : $y=-2,5x+6$,

- (D_2) d'équation : $y=2x-3$.

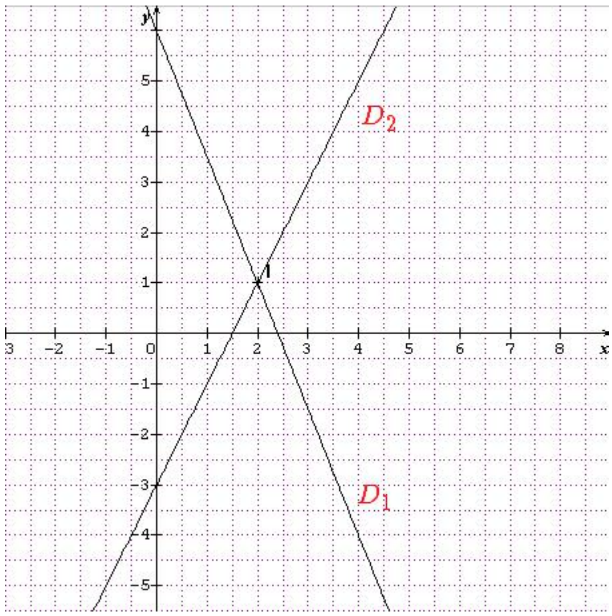
* Un point $M(x_M; y_M)$ se trouve sur la droite (D_1) si ses coordonnées vérifient :

$$y_M = -2,5 \times x_M + 6$$

* Un point $N(x_N; y_N)$ se trouve sur la droite (D_2) si ses coordonnées vérifient :

$$y_N = 2 \times x_N - 3$$

Un point $I(x; y)$ se trouve à l'intersection des droites (D_1) et (D_2) s'il se trouve sur les deux à la fois, c'est-à-dire si ces coordonnées vérifient le système



$$\begin{cases} y = -2,5x + 6 \\ y = \quad 2x - 3 \end{cases}$$

Ainsi, résoudre un système de deux équations à deux inconnues peut s'interpréter comme la recherche du point d'intersection de deux droites dans un repère.

Dans l'exemple précédent, le point d'intersection des droites (D_1) et (D_2) et le point **I de coordonnées (2 ; 1)** ; c'est bien cohérent avec la résolution du système faite précédemment.

III résolution d'un système de deux équations à deux inconnues

III - 1) résolution par substitution du système

Dans le système

$$\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

la seconde ligne peut aussi s'écrire : $y = 2x - 3$

On remplace alors y par $2x - 3$ dans la première ligne du système :

$5x + 2y = 12$ devient : $5x + 2 \times (2x - 3) = 12$

On obtient une équation qui n'a qu'une seule inconnue (x) :

$$\begin{aligned} 5x + 2 \times (2x - 3) &= 12 \\ 5x + 4x - 6 &= 12 \\ 9x &= 18 \\ x &= \frac{18}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Une fois qu'on a la valeur de l'inconnue x, il suffit de la reporter dans l'une des deux équations pour trouver la valeur de l'inconnue y.

On choisit ici de remplacer x par 2 dans la seconde ligne du système :

$$\begin{array}{rcl} -2\times 2+y & - & 3 \\ -4+y & = & -3 \\ y & = & -3+4 \\ y & = & 1 \end{array}$$

Conclusion : $x = 2$ et $y = 1$, ce que l'on note : $\boxed{\text{S}=(2\,;1)}$.

III - 2) résolution du système par combinaison linéaire

a) multiplier ou diviser par un coefficient

règle :

Dans un système, on a de droit de **multiplier ou de diviser une ligne** par un coefficent non nul.

exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 5x & + & 2y & = & 12 & (L_1) \\ -2x & + & y & = & -3 & (L_2) \end{array}\right.$$

En multipliant la deuxième ligne par 2, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 5x & + & 2y & = & 12 & (L_1) \\ -4x & + & 2y & = & -6 & (L_2) \leftarrow (2\times L_2) \end{array}\right.$$

Le but de cette opération est d'avoir **le même coefficient devant l'une des deux inconnues**.

b) soustraire deux lignes

règle :

Dans un système, on a de droit de **remplacer une ligne par la différence des deux lignes**.

exemple : dans le système précédent, on remplace la seconde ligne par la différence des deux lignes :

$$\left\{\begin{array}{ccccrl} 5x & + & 2y & = & 12 & (L_1) \\ 5x-(-4x) & + & 2y-2y & = & 12-(-6) & (L_2) \leftarrow (L_1)-(L_2) \end{array}\right.$$

Ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 2y & = & 12 \\ 9x & & & = & 18 \end{array}\right.$$

Le but de cette opération est d'avoir une ligne qui soit **une équation à une inconnue** (que l'on sait résoudre).

On trouve la valeur de x :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 5x & + & 2y & = & 12 \\ x & & & = & 2 \end{array}\right.$$

c) terminer la résolution du système

On **remplace** la valeur trouvée précédemment dans l'une des lignes du système du départ pour trouver la valeur de l'autre inconnue.

exemple : dans le système précédent, on remplace x par 2 dans la première ligne du système de départ :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 5\times 2 & + & 2y & = & 12 \\ x & & & = & 2 \end{array}\right.$$

ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{lrcc} & 2y & = & 12-10 \\ x & & = & 2 \end{array}\right.$$

et finalement :

$$\left\{\begin{array}{l} x{=}2 \\ y{=}1 \end{array}\right.$$

Conclusion : $x = 2$ et $y = 1$, ce que l'on note : $\boxed{\mathrm{S}{=}(2\,;1)}$.

Cette technique se fait en 3 étapes :

1. **multiplier ou diviser une ou les deux lignes** par des coefficients bien choisis afin qu'une des deux inconnues ait le même coefficient,

2. **remplacer une ligne par la différence des deux lignes précédentes** pour obtenir une équation à une inconnue,

3. **remplacer dans le système de départ l'inconnue trouvée** précédemment pour trouver la valeur de l'autre inconnue.

Deuxième partie

Organisation et gestion de données, Fonctions

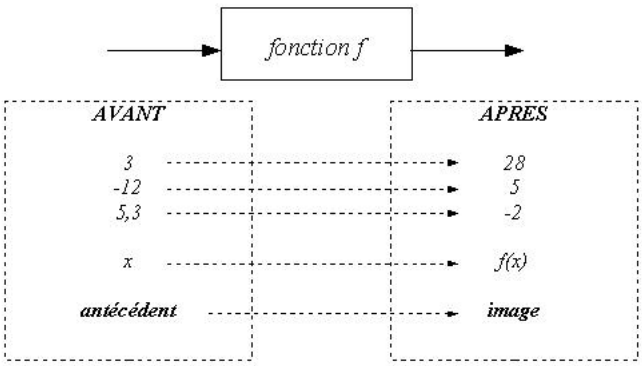
Chapitre 7

Notion de fonction

I notion de fonction

I - 1) introduction

Une fonction est une « boîte »dont on peut schématiser le fonctionnement ainsi :



Il rentre un nombre -*que l'on note souvent* x - qui est transformé en un autre nombre.

I - 2) vocabulaire

Le nombre qui **entre** est **l'antécédent**. Le nombre qui en **ressort** est **l'image**.

Dans le cas précédent :
- 3 a pour image 28,
- 28 est l'image de 3,
- 3 est ***un*** antécédent de 28.

I - 3) notation

La notation $f(x)$ signifie que l'on souhaite calculer l'image du nombre x par la fonction f.

Ainsi, « 3 a pour image 28 par la fonction f »se note : $f(3) = 28$.

II les trois aspects d'une fonction

II - 1) fonction donnée par sa « formule »

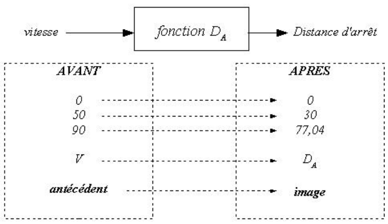
exemple : on noteD_A la distance d'arrêt d'une voiture dans des conditions normales (route sèche, voiture en bon état, conducteur réactif). On note V sa vitesse.

On donne la relation suivante :

$$D_A = 0,28V + 0,0064V^2$$

qui donne la distance d'arrêt *en fonction* de la vitesse. On devrait noter : $\boxed{D_A(V)}$.

Ceci est une **fonction** : le nombre qui entre dans la fonction est la vitesse V de la voiture (en km/h), le nombre qui sort est D_A, la distance d'arrêt (exprimée en m).



II - 2) tableau de valeurs

V	0	20	40	60	80	100	120	140
D_A	0	8,16	21,44	39,84	63,36	92	125,76	164,64

Dans un tableau de valeurs :
- 1ère ligne : les antécédents (ici, V),
- 2ème ligne : on **calcule** les images à partir de la fonction (ici, on calcule D_A grâce à la relation : $D_A(V) = 0,28V + 0,0064V^2$).

Par exemple, pour une vitesse de $V = 20$ km/h : $D_A = 0,28 \times 20 + 0,0064 \times 20^2 = 8,16$.

II - 3) représentation graphique d'une fonction

définition

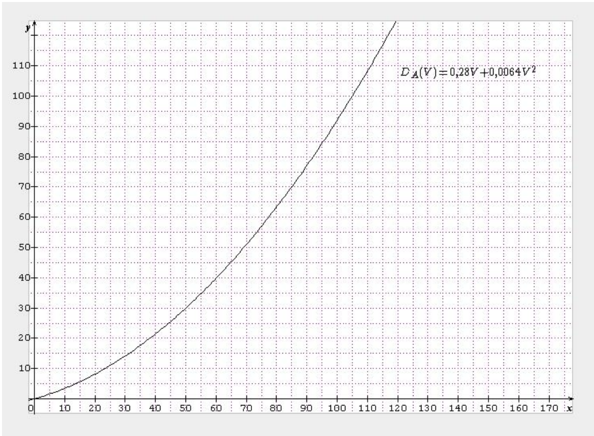
a désigne un nombre et $f(a)$ est son image par la fonction f.

Un repère étant choisi, on considère les points M de coordonnées $(a; f(a))$.

L'ensemble $(\mathcal{C})$ de ces points est la **représentation graphique** de la fonction f dans ce repère.

La relation « $y = f(x)$ »s'appelle **l'équation de la courbe** qui représente la fonction f.

méthode pratique : on va utiliser un repère :
- axe des **abscisses** (l'axe horizontal) : on place les valeurs des **antécédents** (*axe des « x »*).
- axe des **ordonnées** (l'axe vertical) : on place les valeurs des **images** (*axe des « y »*).



En fait, il faut placer « une infinité »de points pour obtenir la courbe : plus on a de points, plus le tracé sera préci. Il ne faut *a priori* pas relier les points à la règle !

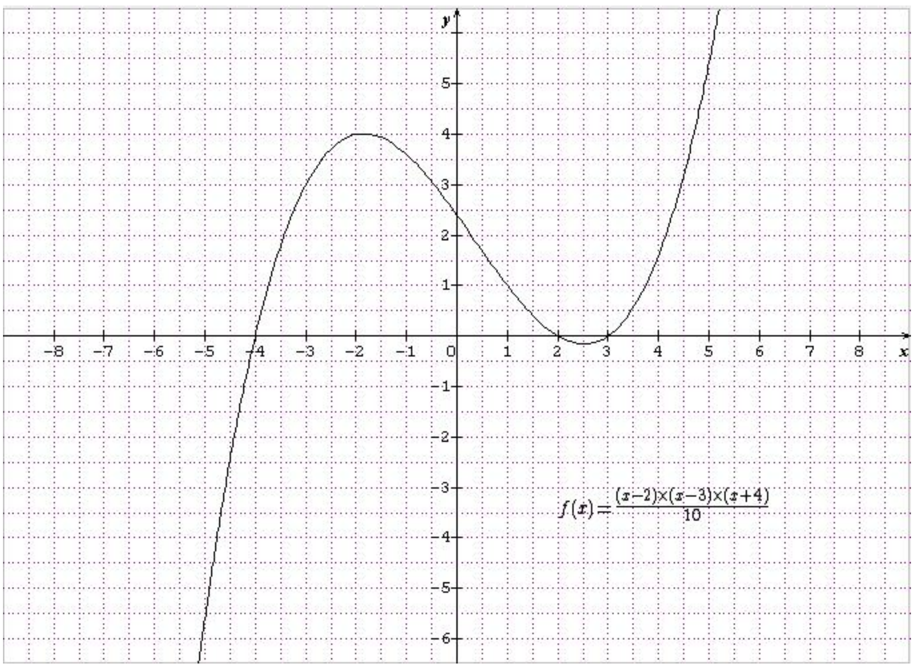
II - 4) synthèse

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+3)(x+4)}{10}$$

On va compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-5,6$	0	3	4	$3,6$	$2,4$	1	0	0	$1,6$	$5,4$

On obtient la courbe représentative suivante :



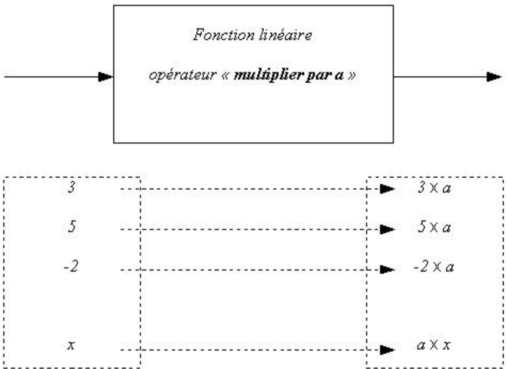
Chapitre 8

Proportionnalité et fonction linéaire

I définition

I - 1) défintion

Une fonction linéaire est une **fonction** qui est un **opérateur muliplicatif**.



Notation

On note souvent une telle fonction :

* $f(x) = a \times x$

* ou encore $f(x) = ax$

(*On mulitplie x par le nombre a.*)

exemples : $f(x) = 7x$ $f(x) = -2x$ $f(x) = \frac{2}{3}x$ $f(x) = \frac{x}{7}$

remarque : pour le dernier exemple, on peut interpréter $\frac{x}{7}$ comme une division (par 7) ou comme une mulitplication (par $\frac{1}{7}$).
C'est pourquoi, dans le terme « opérateur mulitplicatif », il faut comprendre que les divisions en font partie.

I - 2) fonction linéaire et proportionnalité

Une fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité.

Le coefficient de la fonction linéaire (noté a) dans la définition est le coefficient de proportionnalité.

II représentation graphique

II - 1) propriété

La représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a dans un repère est une droite (d) qui passe par l'origine du repère.

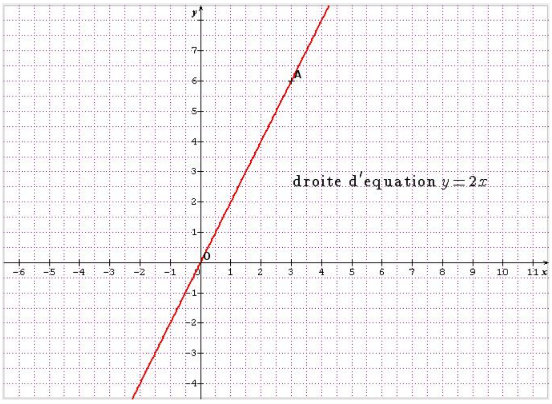
Le nombre a est appelé le coefficient directeur de la droite (d).

exemple :

La représentation graphique de la fonction linéaire $f(x) = 2x$ est une droite (d) qui passant par l'origine du repère.

Pour tracer la droite (d), on détermine les coordonnées d'un deuxième point.

Par exemple : $f(3) = 2 \times 3 = 6$.
La droite (d) passe par le point de $A\ (3; 6)$.



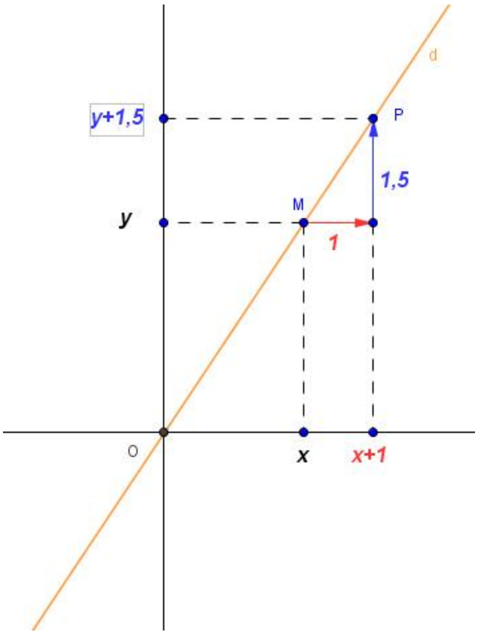
II - 2) interprétation du coefficient directeur d'une droite

Cas $a > 0$

On considère $f : x \mapsto 1,5x$.

La droite (d) est sa représentation graphique.

M est un point quelconque de la droite (d).



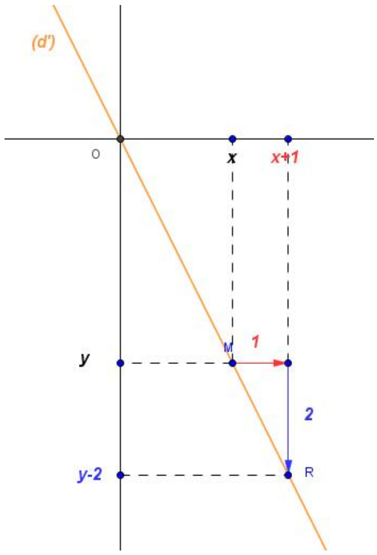
Si on **augmente son abscisse de 1**, et si on **augmente de 1,5 son ordonnée**, on obtient les coordonnées d'un nouveau point P de (d).

Cas $a < 0$

On considère $f : x \mapsto -2x$.

La droite (d') est sa représentation graphique.

M est un point quelconque de la droite (d').



Si **on augmente son abscisse de 1**, et si on **diminue de 2 son ordonnée**, on obtient les coordonnées d'un nouveau point R de (d').

III hausse ou baisse exprimée en pourcentage

III - 1) hausse

Une **hausse** de $a\%$ se traduit par une **multiplication** par $1 + \dfrac{a}{100}$.

exemples :

* Une hausse de 22,5 % revient à mulitplier par 1,225.
Un objet qui coûte 48 €, augmenté de 22,5 % coûtera : $48 \times 1,225 = 58,8$ €.

* Une hausse de 35 % revient à mulitplier par 1,35.
Un objet qui coûte, après une hausse de 35 %, 71,55 €, côutait avant cette hausse :
$71,55 \div 1,35 = 53$ €.

III - 2) baisse

Une **baisse** de a% se traduit par une **multiplication** par $1-\dfrac{a}{100}$.

exemples :

* Une baisse de 22,5 % revient à mulitplier par 0,775.
Un objet qui coûte 48 €, diminué de 22,5 % coûtera : $48 \times 0,775 = 37,2$ €.

* Une baisse de 35 % revient à mulitplier par 0,65.
Un objet qui coûte, après une baisse de 35 %, 48,75 €, côutait avant cette hausse :
$48,75 \div 0,65 = 75$ €.

IV déterminer une fonction linéaire

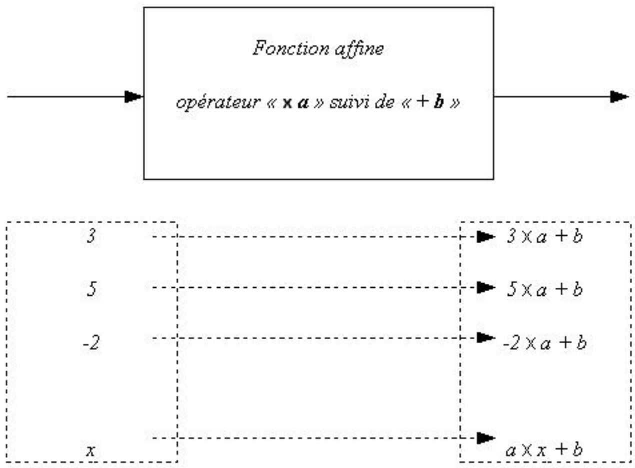
approche « fonction » *consigne* : déterminer la fonction linéaire f, telle que 3 a pour image -2 par f.	**approche « graphique »** *consigne* : déterminer la fonction linéaire f qui a une représentation graphique qui passe par le point $P(3\,;\text{-}2)$.
f est linéaire donc du type : $f(x) = ax$.	la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite d'équation : $y = ax$.
3 a pour image -2 se traduit par : $f(3) = -2$, ce qui donne : $a \times 3 = -2$.	la droite passe par P (3 ;-2) se traduit par : $-2 = 3 \times a$
on trouve : $a = \dfrac{-2}{3} = -\dfrac{2}{3}$	
conclusion : $f(x) = -\dfrac{2}{3}x$	*conclusion* : la fonction linéaire est : $f(x) = -\dfrac{2}{3}x$. Sa représentation graphique est la droite d'équation : $y = -\dfrac{2}{3}x$

Chapitre 9

Fonction affine

I définition

une fonction affine est une **fonction** qui est un **opérateur muliplicatif** suivi d'**un opérateur additif**.



Notation

On note souvent une telle fonction :

* $f(x) = a \times x + b$

* ou encore $f(x) = ax + b$

(*On mulitplie* x *par le nombre* a *puis on ajoute le nombre* b .)

exemples : $f(x) = 7x + 2$ $f(x) = -2x - 5$ $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$ $f(x) = \frac{x}{7} - 9$

remarque : pour le deuxième exemple, on peut interpréter -5 comme une addition : +(-5). C'est pourquoi, dans le terme « opérateur additif », il faut comprendre que les soustractions en font partie.

II représentation graphique

Soit f la fonction affine : $f : x \mapsto ax + b$

La représentation graphique de la fonction affine f dans un repère est une droite (d).

Le nombre a est appelé le **coefficient directeur** de la droite (d).

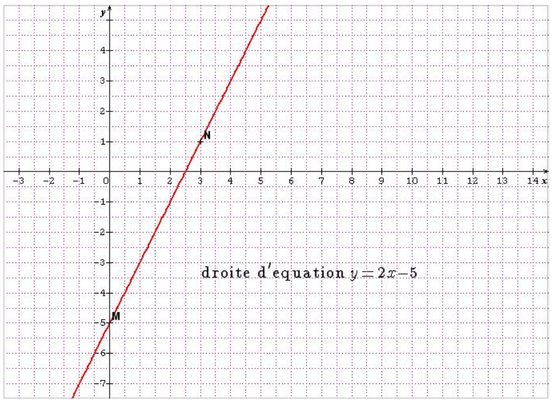
Le nombre b est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite (d).

méthode pratique :
La représentation graphique de la fonction linéaire $f(x) = 2x - 5$ est une droite.

Il suffit de trouver deux points appartenant à cette droite.

Elle passe par le point de coordonnées : $(0; 2 \times 0 - 5)$ c'est-à-dire par $(0; -5)$.

Reste à trouver un second point : prenons $x = 3$; on a : $f(3) = 2 \times 3 - 5 = 6 - 5 = 1$. La droite passe par le point de coordonnées $(3; 1)$. Il suffit de relier ces deux points.



remarques :
- si $f(x) = ax + b$, la représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0; a \times 0 + b)$ c'est-à-dire $\boxed{(0; b)}$: c'est pourquoi, b s'appelle **l'ordonnée à l'origine**.

- si a est positif, la droite qui représente f « monte ». Plus a est grand, plus elle monte rapidement. De même, si a est négatif, la droite descend : a est la valeur qui **dirige** la droite, on l'appelle **coefficient directeur**.

III détermination d'une fonction affine

approche « fonction »	**approche « graphique »**
consigne : déterminer la fonction linéaire f, telle que : – 3 a pour image -2, – 5 est l'antécédent de 6.	*consigne* : déterminer la fonction linéaire f qui a une représentation graphique qui passe par les points M(3 ;-2) et N(5 ;6).
f est affine donc du type : $f(x) = ax + b$.	la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite d'équation : $y = ax + b$.
3 a pour image -2 se traduit par : $f(3) = -2$, ce qui donne : $a \times 3 + b = -2$. 5 est l'antécédent de 6 se traduit par : $f(5) = 6$, ce qui donne : $a \times 5 + b = 6$.	la droite passe par M (3 ;-2) se traduit par : $-2 = 3 \times a + b$ la droite passe par N (5 ;6) se traduit par : $6 = a \times 5 + b$

On doit alors résoudre un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} a \times 3 + b = -2 \\ a \times 5 + b = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + b = -2 \\ 5a + b = 6 \end{cases}$$

En faisant la différence entre la seconde et la première ligne, on obtient :

$$5a - 3a = 6 - (-2) \text{ c'est-à-dire } 2a = 8 \text{ et donc } a = 4.$$

Pour trouver b, on remplace a par 4 dans la seconde ligne par exemple :

$$b = 6 - 5 \times 4 = 6 - 20 = -14.$$

conclusion : $f(x) = 4x - 14$	*conclusion* : la fonction linéaire est : $f(x) = 4x - 14$. Sa représentation graphique est la droite d'équation : $y = 4x - 14$

Chapitre 10

Statistiques

I introduction

Une série statistique est une série de nombres ; l'étudier, c'est « y voir plus clair ».
Pour cela, on peut la ranger, calculer certains paramètres.

Nous allons traiter l'exemple suivant : voici les notes du dernier contrôle de la classe de $3^{\text{ème}}A$:

7, 14, 3, 4, 7, 5, 15, 7, 7, 5, 6, 20, 16, 4, 4, 20, 7, 10, 17, 18, 11, 4, 6, 20, 17

vocabulaire :
- la **population** étudiée est les élèves de la classe de $3^{\text{ème}}A$.
- le **caractère** étudié est la note obtenue au dernier contrôle.
- on a relevé 25 notes : l'**effectif total** est 25.
- les **valeurs** du caractère sont : 3, 4, 5, 6, 7, etc.

II moyenne

On peut déjà ranger ces notes :

note (sur 20)	3	4	5	6	7	10	11	14	15	16	17	18	20	total
effectif	1	4	2	2	5	1	1	1	1	1	2	1	3	25

Pour calculer la note **moyenne** de la classe, on fait :

$$\frac{3+4\times 4+5\times 2+6\times 2+7\times 5+10+11+14+15+16+17\times 2+18+20\times 3}{1+4+2+2+5+1+1+1+1+1+2+1+3}=10,16$$

conclusion : la note moyenne de la classe de $3^{\text{ème}}A$ est donc 10,16 sur 20.

Voici les notes de la classe de $3^{\text{ème}}B$:

note (sur 20)	7	8	9	10	11	15	16	total
effectif	2	5	4	4	1	2	2	20

Pour calculer la note **moyenne** de la classe, on fait :

$$Moyenne_{3^{\text{ème}}B}=\frac{7\times 2+8\times 5+9\times 4+10\times 4+11\times 1+15\times 2+16\times 2}{2+5+4+4+1+2+2}=10,15$$

conclusion : la note moyenne de la classe de $3^{\text{ème}}B$ est de 10,15 sur 20.

III médiane

définition

La **médiane** d'une série de données est un nombre qui partage cette série en deux séries de même effectif.

La médiane permet de préciser la **position** des autres données de la série.

exemples :

* pour la classe de $3^{\text{ème}}A$: cette classe compte 25 élèves : la note du $13^{\text{ème}}$ partage la série en deux séries de même effectif.

La $13^{\text{ème}}$ note est un $7/20$; il y a 12 élèves qui ont une note inférieure ou égale à 7 ; il y a 12 élèves qui ont une note supérieure ou égale à $7/20$.

* pour la classe de $3^{\text{ème}}B$: cette classe compte 20 élèves : la note médiane est à chercher entre la $9^{\text{ème}}$ et la $10^{\text{ème}}$ note.

La $9^{\text{ème}}$ note est $9/20$; la $10^{\text{ème}}$ est aussi $9/20$; la note médiane est donc $9/20$; il y a 10 élèves qui ont une note inférieure ou égale à $9/20$ et 10 élèves qui ont une note supérieure ou égale à $9/20$.

Il faut avoir plus de $7/20$ pour être dans la première moitié de la classe de $3^{\text{ème}}A$; il faut avoir plus de $9/20$ pour être dans la première moitié de la classe de $3^{\text{ème}}B$.

IV étendue d'une série

définition

L'**étendue** d'une série statistique, c'est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.

L'étendue précise la **dispersion** des données de la série statistique.

exemples :

* pour la classe de $3^{\text{ème}}A$: l'étendue est égale à : $20 - 3 = 17$.

* pour la classe de $3^{\text{ème}}B$: l'étendue est égale à : $16 - 7 = 11$.

remarque :

En comparant les deux valeurs des étendues, on peut dire que les classes de $3^{\text{ème}}A$ et de $3^{\text{ème}}B$ n'ont pas les mêmes profils. Les moyennes sont presque les mêmes, mais une classe peut être qualifiée d'**homogène** et l'autre est plutôt **hétérogène**.

V premier et troisième quartiles

On considère une série de données rangées dans l'ordre croissant.

Les **quartiles** sont des données de la série qui la partagent en quatre parties à peu près de même effectif.

Le **premier quartile** est noté Q_1.

Le **troisième quartile** est noté Q_3

remarques :

* Q_1 est la plus petite donnée pour laquelle au moins 25% (c'est-à-dire un quart) des données sont inférieures ou égales à Q_1.

* Q_3 est la plus petite donnée pour laquelle au moins 75% (c'est-à-dire trois quarts) des données sont inférieures ou égales à Q_3.

exemples :

* pour la classe de $3^{\text{ème}}A$: cette classe compte 25 élèves : $\dfrac{25}{4} = 6,125$.

Le plus petit entier supérieur à 6,125 est 7.

Q_1 est donc la $7^{\text{ème}}$ valeur de la série : c'est la note $5/20$.

$\dfrac{3}{4} \times 25 = 18,375$; Q_3 est donc la $19^{\text{ème}}$ valeur de la série : c'est la note $16/20$.

* pour la classe de $3^{\text{ème}}B$: cette classe compte 20 élèves : $\dfrac{20}{4} = 5$.

Q_1 est donc la $5^{\text{ème}}$ valeur de la série : c'est la note $8/20$.

$\dfrac{3}{4} \times 20 = 15$; Q_3 est donc la $15^{\text{ème}}$ valeur de la série : c'est la note $10/20$.

Chapitre 11

Probabilités

I Vocabulaire

On réalise l'expérience suivante : on lance un dé à six faces équilibré et on regarde le nombre de points inscrit sur la face supérieure.

définition

Chacun des résultats possibles d'une expérience est une **issue** de cette expérience.

exemple : l'expérience du lancé de dé admet six issues : 1, 2, 3, 4 , 5 et 6.

définitions

- un **évènement** est une condition qui peut être, ou ne pas être, réalisée lors d'une expérience.
- un **évènement** peut être réalisé par une ou plusieurs issues de l'expérience.
- un évènement réalisé par une seule issue est un **évènement élémentaire**.

exemples :
* « *on obtient un nombre pair* »est un évènement réalisé par les issues 2, 4 et 6.
* « *on obtient 4* »est un évènement élémentaire.

définition

Une expérience est dite **aléatoire** lorsque chaque issue ne dépend pas des issues des expériences précédentes.

exemple : lors d'un lancé de dé, chaque issue ne dépend pas des issues précédentes. Cette expérience est bien une expérience aléatoire.

remarques :
* une expérience aléatoire est uniquement due au **hasard**.
* une expérience aléatoire peut être réalisée autant de fois que l'on veut, dans les mêmes conditions.

II Notion de probabilité

II - 1) définition

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un évènement se rapproche d'une « fréquence théorique »appelée **probabilité**.

exemple : si on lançait le dé un très grand nombre de fois, on obtiendrait « 4 »environ une fois sur six.

notation : Soit A un évènement, on note $\mathbf{p(A)}$ la probabilité que l'évènement A se réalise.

II - 2) propriétés

– une probabilité est un **nombre compris entre 0 et 1**.

– un évènement dont la probabilité est nulle est un **évènement impossible**.

– un évènement dont la probabilité est égale à 1 est un **évènement certain**.

– la somme des probabilités de tous les évènements élémentaires est égale à 1.

II - 3) équiprobabilité

Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés, on dit qu'il s'agit d'une situtation d'**équiprobabilité**.

Dans une situtation d'équiprobabilité, tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.

exemple : pour le dé à six faces, on a autant de chance d'obtenir 1, que 2, que 3, que 4, que 5, que 6 ; il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

propriété :

On désigne par n le nombre d'issues d'une expérience aléatoire.

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement élémentaire est égale à $\dfrac{1}{n}$

exemple : on considère l'évènement élémentaire N : « obtenir le nombre 4 ».
On a : $p(N) = \dfrac{1}{6}$

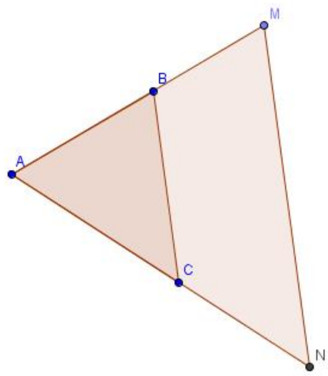
Troisième partie

Géométrie

Chapitre 12

Configuration de Thalès

I agrandissement, réduction d'un triangle



Sur la figure ci-contre :

* les points A, B et M sont alignés,

* les points A, C et N sont alignés,

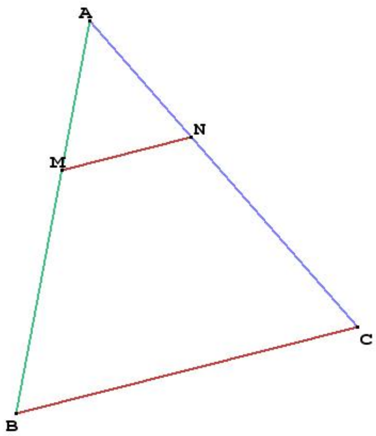
* les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

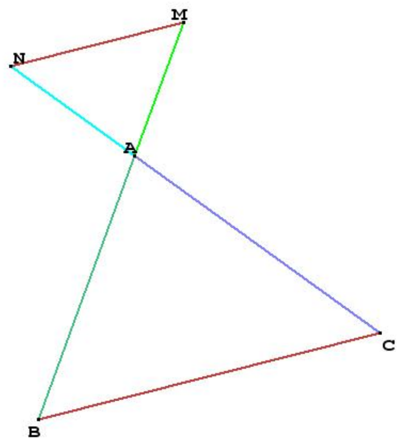
Le triangle AMN est un **agrandissement** du triangle ABC.
Toutes les longueurs sont multipliées par **le rapport d'agrandissement** k, avec $k > 1$.

Le triangle ABC est une **réduction** du triangle AMN.
Toutes les longueurs sont multipliées par le **rapport de réduction** k', avec $0 < k' < 1$.

Les mesures des angles de la figure sont inchangées.

II le théorème de Thalès





Si on sait que :

- les droites (AB) et (AC) sont **sécantes** en A,
- les points A, M, N et A, N, C sont **alignés dans cet ordre**,
- les droites (MN) et (AB) sont **parallèles**,

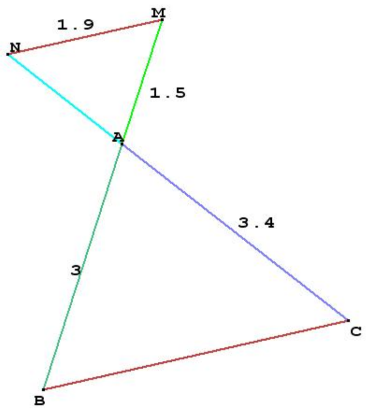
alors les triangles AMN et ABC sont **proportionnels** et donc :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

III applications du théorème de Thalès

III - 1) calculer une longueur

On donne comme information : $(MN) \mathbin{//} (BC)$.
Calculer les longueurs AN et BC.



On a bien toutes les conditions d'application du théorème de Thalès.
Les triangles ABC et AMN sont proportionnels, ce qui donne :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

On remplace les valeurs connues :

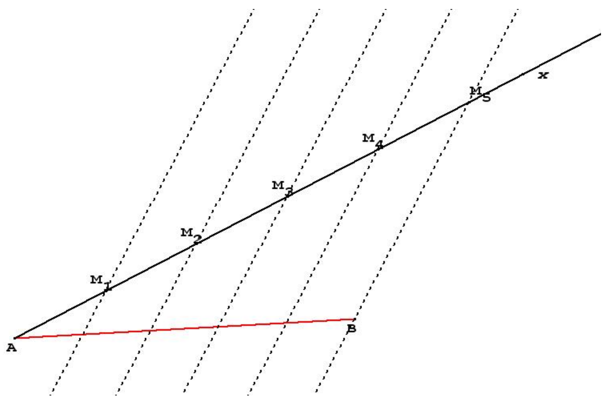
$$\frac{1,5}{3} = \frac{AN}{3,4} = \frac{1,9}{BC}$$

D'une part, $\frac{1,5}{3} = \frac{AN}{3,4}$ et donc : $AN = 3,4 \times 1,5 \div 3 = 1,7$.

D'autre part, $\frac{1,5}{3} = \frac{1,9}{BC}$ et donc : $BC = 1,9 \times 3 \div 1,5 = 3,8$.

III - 2) partager un segment en parties égales

activité : sans règle graduée, comment partager le segment [AB] en 5 parties égales ?



Programme de construction :

1. construire la demi droite [Ax).
2. reporter (au compas), 5 fois la même longueur (une longueur quelconque) : on place ainsi les points M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5.
3. construire la droite (BM_5).
4. construire les droites parallèles à (BM_5) passant par M_1, M_2, M_3 et M_4.

III - 3) prouver que deux droites ne sont pas parallèles

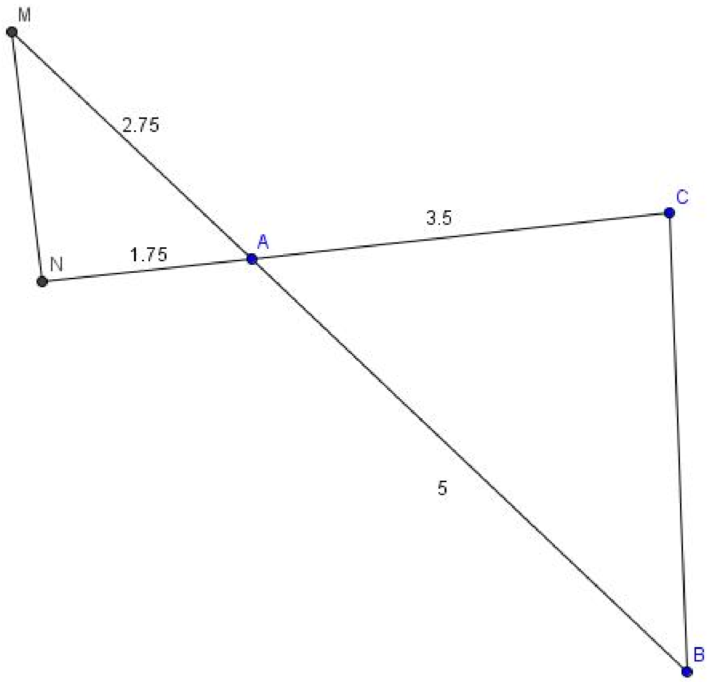
Conséquence du théorème de Thalès :

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de la droite (d), distincts du point A.

Soient C et N deux points de la droite (d'), distincts du pont A.

Si $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.



exemple :

Sur la figure ci-dessus :

* $AB = 5$ cm, $AM = 2,75$ cm, $AN = 1,75$ cm et $AC = 3,5$ cm

* les droites (BM) et (CN) sont sécantes au point A.

On constate que : $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$.

Donc, par conséquence du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

IV la réciproque du théorème de Thalès

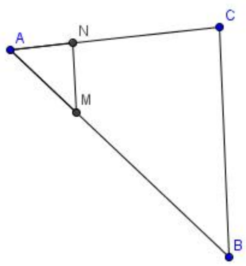
Soient (d) et (d') deux droites sécantes en un point A.

Soient B et M deux points de la droite (d), distincts du point A.

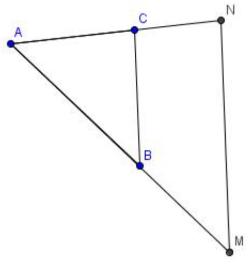
Soient C et N deux points de la droite (d'), distincts du pont A.

Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ **et** si les points A, B, M et A, C, N sont dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

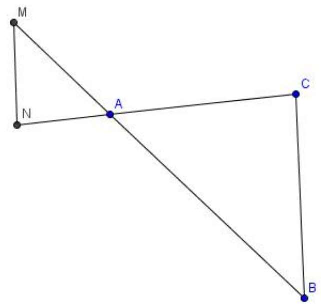
remarque : concernant l'ordre des points, on retrouve trois configurations.



les points A, M, B et A, N, C sont dans le même ordre



les points A, B, M et A, C, N sont dans le même ordre



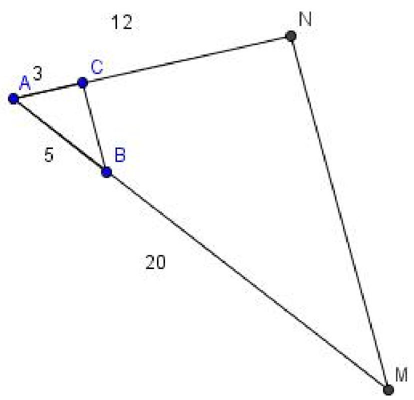
les points B, A, M et C, A, N sont dans le même ordre

exemple :

On considère la figure ci-contre pour laquelle :

* $AC = 3$ cm, $AB = 5$ cm, $AN = 12$ cm, $AM = 20$ cm

* les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A



On a :

* $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{20}{5} = \dfrac{5 \times 4}{5} = 4$
* $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{12}{3} = \dfrac{3 \times 4}{3} = 4$

On **constate** que : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

De plus, les points M et sont alignés dans le même ordre.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Chapitre 13

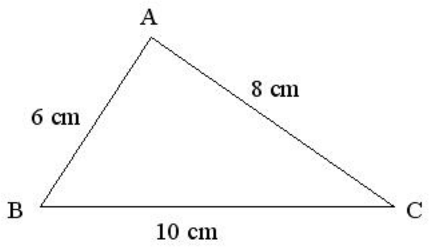
Triangles rectangles. Trigonométrie

I reconnaître un triangle rectangle

I - 1) par la réciproque du théorème de Pythagore

Activité : le triangle ABC est-il rectangle ?

Remarquons que s'il est rectangle, le plus grand côté étant $[BC]$, il ne peut l'être qu'en A.



Il s'agit ici de bien rédiger la réciproque du théorème :

– d'une part, $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

– d'autre part, $BC^2 = 10^2 = 100$.

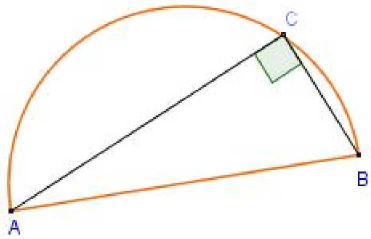
On **constate** que : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

D'après la **réciproque** du théorème de Pythagore, on conclut que le triangle ABC est rectangle en A.

I - 2) dans un demi cercle

Si on sait qu'un triangle est **inscrit dans un demi-cercle**, c'est-à-dire :
- un des côtés du triangle est un diamètre d'un cercle,
- le troisième sommet est sur le cercle,

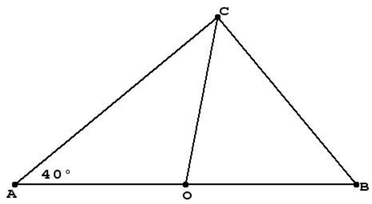
alors ce triangle est rectangle.



remarque : ce résultat se démontre grâce au théorème de l'angle inscrit / angle au centre (voir le chapitre 14).

I - 3) par calcul d'angles

Activité : dans le triangle ABC, AO=OB=OC et $\widehat{BAC} = 40°$. ABC est-il rectangle ?



solution :

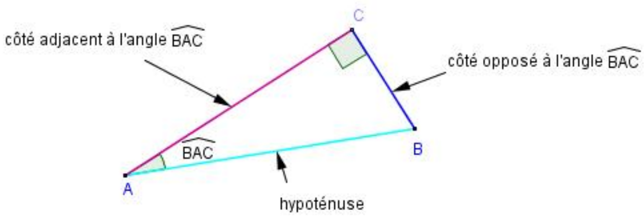
- *OAC est isocèle en O donc :* $\widehat{ACO} = \widehat{OAC} = 40°$.
- *De plus,* $\widehat{AOC} = 180 - (2 \times 40) = 100°$.
- *Puis,* $\widehat{BOC} = 180°$ -$\widehat{AOC} = 180 - 100 = 80°$.
- *OCB étant isocèle en O,* $\widehat{OCB} = (180 - 80) \div 2 = 50°$
- $\widehat{ACB} = \widehat{ACO} + \widehat{OCB} = 40 + 50 = 90°$ *: le triangle est bien rectangle.*

remarque : ce raisonnement peut se généraliser ; si on remplace l'angle de 40° par une autre valeur, on a le même résultat ; ceci permet de donner le résultat suivant :

dans un triangle, si une médiane a une longueur égale à la moitié du côté opposé, alors le triangle est rectangle.

II cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

II - 1) définitions



cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$:

$$cos(\widehat{BAC}) = \frac{\text{longueur du côté \textbf{adjacent} à l'angle}}{\text{longueur de l'\textbf{hypoténuse}}} = \frac{BA}{BC}$$

sinus de l'angle $\widehat{BAC}$:

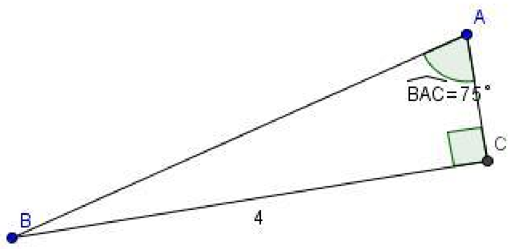
$$sin(\widehat{BAC}) = \frac{\text{longueur du côté \textbf{opposé} à l'angle}}{\text{longueur de l'\textbf{hypoténuse}}} = \frac{AC}{BC}$$

tangente de l'angle $\widehat{BAC}$:

$$tan(\widehat{BAC}) = \frac{\text{longueur du côté \textbf{opposé} à l'angle}}{\text{longueur du côté \textbf{adjacent} à l'angle}} = \frac{AC}{AB}$$

II - 2) calcul de longueurs

> Dans un triangle rectangle, connaissant une longueur et un angle, on peut connaître la longueur des autres côtés.



On veut calculer la longueur du segment $[BA]$:

- $sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{BC}{BA} = \dfrac{4}{BA}$.
- Cela donne : $sin(75) = \dfrac{4}{BA}$.
- On fait évoluer l'expression pour isoler BA : $sin(75) \times BA = 4$ et donc : $BA = \dfrac{4}{sin(75)}$.

- On a trouvé la **valeur exacte** : $\boxed{BA = \dfrac{4}{sin(75)}}$.
- Avec la calculatrice, on obtient une **valeur approchée** au millimètre : $BA \approx 4,2$ cm.

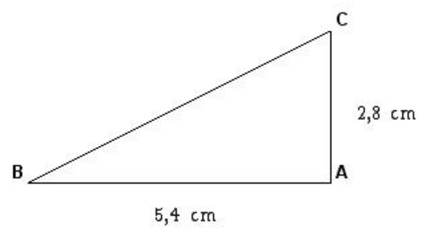
Remarques :
- au départ, si on ne sait pas s'il faut utiliser *cosinus*, *sinus* ou *tangente*, les essayer chacun leur tour et voir lequel est adapté à l'exercice.

- bien vérifier que la calculatrice est réglée pour des angles en degrés **(DEG)**.

- penser à **vérifier si le résultat est cohérent** : trouver l'hypoténuse plus petit qu'un autre côté ne va pas !

II - 3) calcul d'angles

> Dans un triangle rectangle, connaissant deux longueurs, on peut connaître les mesures des angles.



On veut calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$:

- $tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \dfrac{AC}{AC} = \dfrac{2,8}{5,4}$.
- On utilise alors la calculatrice, avec la touche « $\tan^{-1}$ »ou « Atan ».

- On tape : « $2,8 \div 5,4$ EXE »puis « $\tan^{-1}$ ANS ».

- On a trouvé une **valeur approchée**, au dixième de degré : $\boxed{\widehat{ABC} \approx 27,4°}$.

II - 4) deux formules de trigonométrie

Pour tout angle aigu de mesure α, on a :

$$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} \qquad \text{et} \qquad cos(\alpha)^2 + (sin(\alpha)^2 = 1$$

Remarque : ces deux formules peuvent se démontrer.

exemple :

x est la mesure d'un angle tel que : $sin(x) = 0,6$

Calcul du cosinus de cet angle :

On a : $(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$

Ainsi : $(cos(x))^2 + 0,6^2 = 1$

On en déduit que : $(cos(x))^2 = 1 - 0,36 = 0,64$

Par conséquent, comme $cos(x) > 0$, on a : $cos(x) = \sqrt{0,64}$, donc $cos(x) = 0,8$

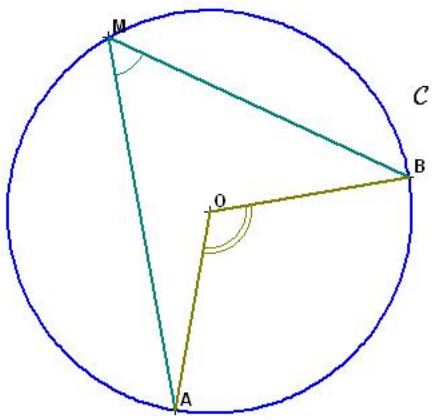
Chapitre 14

Angles inscrits. Polygones réguliers

I angle inscrits, angle au centre

I - 1) vocabulaire

- Si A, B et M sont trois points d'un cercle $\mathcal{C}$, on dit que $\widehat{AMB}$ est **un angle inscrit** dans le cercle $\mathcal{C}$ et qu'il **intercepte** l'arc AB.
- l'angle $\widehat{AOB}$ est **l'angle au centre** associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$; ils interceptent le même arc.



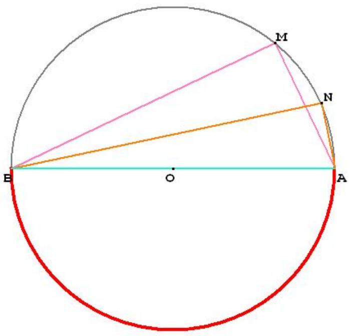
I - 2) angle inscrit et angle au centre associé

théorème (démontré en classe) :

> théorème (démontré en classe) :
> la mesure d'un **angle inscrit** dans un cercle est égal à **la moitié** de l'**angle au centre** qui lui est associé.

exemple : sur la figure précédente : $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$. Si $\widehat{AOB} = 130°$, alors $\widehat{AMB} = 65°$.

remarque importante :



Ici : $\widehat{AOB} = 180°$, et donc

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{180}{2} = 90°$$

Le triangle AMB est rectangle en M, le triangle ANB est rectangle en N.

Dans le cas où A et B sont diamètralement opposés, on a : $\widehat{AOB} = 180°$

D'après le théorème précédent, on obtient, quel que soit le point M sur le cercle :

$$\widehat{AMB} = \frac{180}{2} = 90°$$

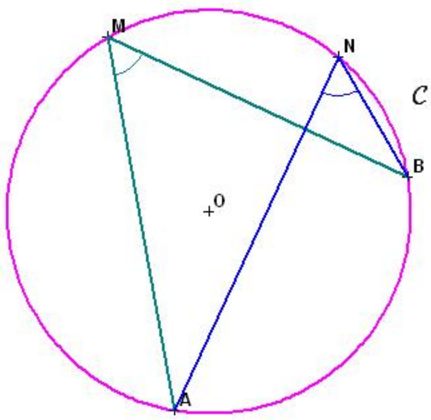
Ceci démontre la propriété vue en 4^{eme} :

un triangle inscrit dans un demi cercle est un triangle rectangle.

I - 3) angles inscrits

théorème :

Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.



démonstration :
ces angles inscrits ont tous une mesure égale à la moitié de celle de l'angle au centre qui leur est associé. Ils ont donc tous la même mesure.

exemple : sur cette figure :

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$$

Si $\widehat{AMB} = 50°$, alors $\widehat{ANB} = 50°$.

II polygones réguliers

Un polygone **régulier** est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure.

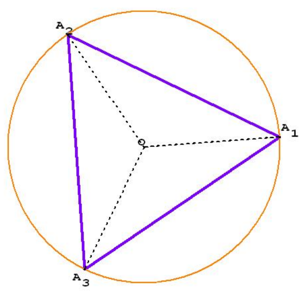
propriétés :

– il existe un **cercle** qui passe par tous les sommets d'un polygone regulier. Son centre O est appelé le centre du polygone régulier.

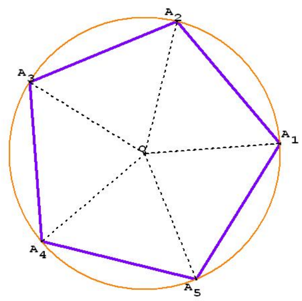
– si $[AB]$ est un côté d'un polygone régulier de centre O à n côtés, alors :

$$\widehat{AOB} = \frac{360°}{n}$$

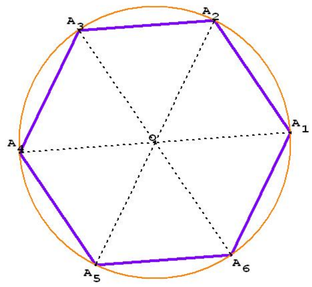
exemples :



triangle équilatéral
$\widehat{A_1OA_2} = \frac{360}{3} = 120°$



pentagone régulier
$\widehat{A_1OA_2} = \frac{360}{5} = 72°$



hexagone régulier
$\widehat{A_1OA_2} = \frac{360}{6} = 60°$

Chapitre 15

Géométrie dans l'espace

I sections planes de solides

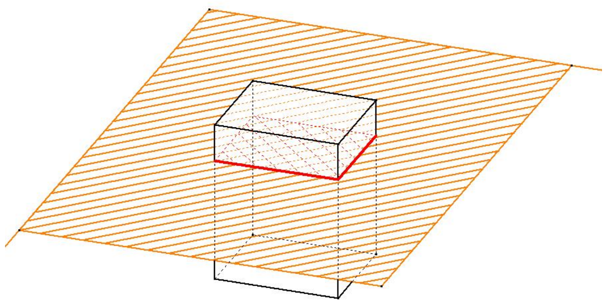
I - 1) définition

Un solide est coupé par un plan.

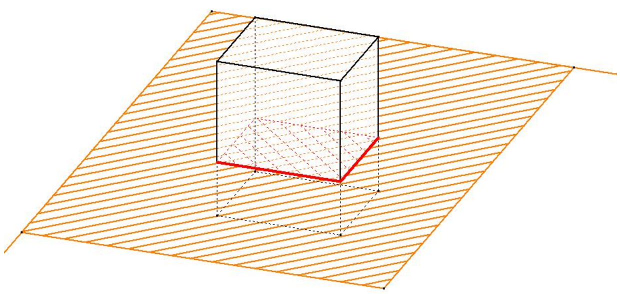
Le surface plane obtenue est appelée la **section du solide par le plan** ou la **section plane du solide**.

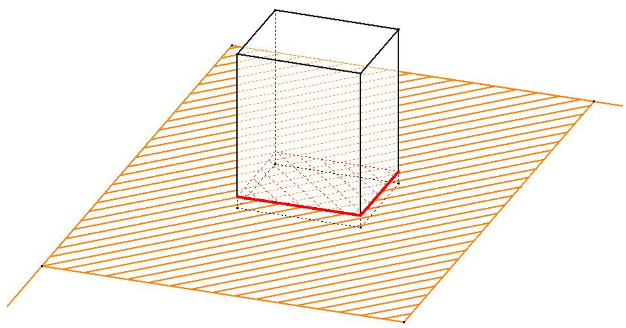
I - 2) section d'un pavé

La section d'un pavé par un plan parallèle à la face $\mathcal{F}$ est un **rectangle qui a les mêmes dimensions que la face** $\mathcal{F}$.



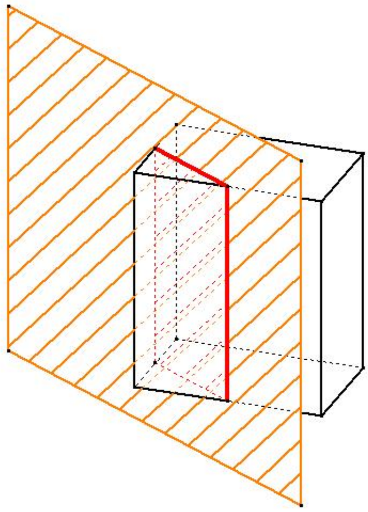
Ici, la face $\mathcal{F}$ est la face supérieure du pavé.
On coupe par un plan parallèle à $\mathcal{F}$, à différentes hauteurs du pavé.
La section est dans tous les cas un rectangle de mêmes dimensions que $\mathcal{F}$.





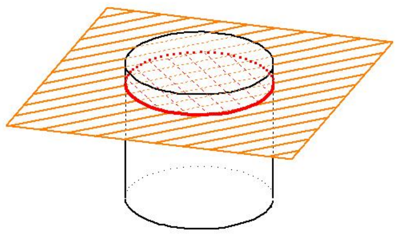
La section d'un pavé par un plan **parallèle à une arête** est un rectangle.

Ici, le plan de coupe passe par les milieux des arrêtes des faces supérieure et inférieures. On peut connaître les dimensions de la section : sa hauteur est la hauteur du pavé ; pour sa largeur, on utilisera le théorème de Pythagore (bien repérer les angles droits sur cette figure en perspective).

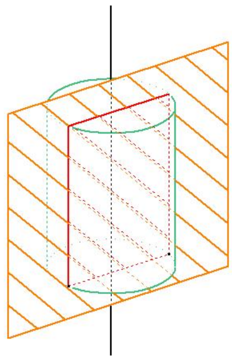


I - 3) section d'un cylindre de révolution

La section d'un cylindre de révolution par un plan **perpendiculaire à son axe** est un disque.



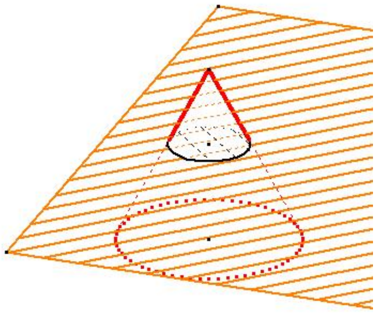
La section d'un cylindre de révolution par un plan **parallèle à son axe** est un rectangle.



II pyramide et cône de révolution

II - 1) section de cône

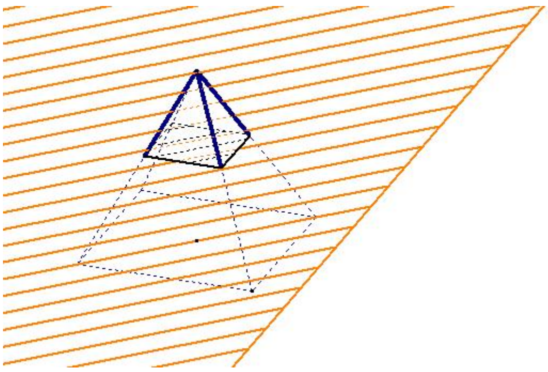
La section d'un cône par un **plan parallèle à la base** est un disque.



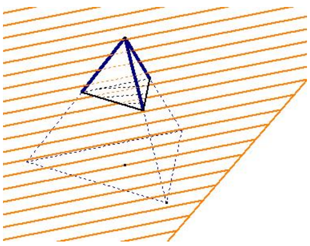
Pour calculer le rayon de la section, on pourra utiliser ***le théorème de Thalès*** *ou* ***un coefficient de réduction****.*

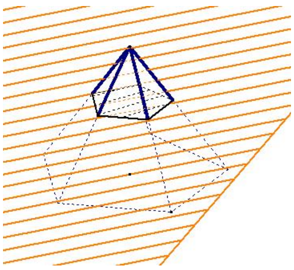
II - 2) section de pyramide

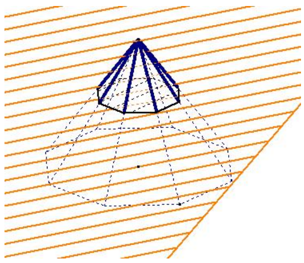
La section d'une pyramide par un **plan parallèle à la base** est un polygone de même nature que le polygone de base.



- *Pour calculer les dimensions de la section, on pourra utiliser* ***le théorème de Thalès*** *ou* ***un coefficient de réduction****.*
- *Si la pyramide est à base triangulaire, la section sera un triangle ; si la pyramide est à base pentagonale, la section sera un pentagone :* ***la section est une réduction la base****.*







III sphère et boule

définitions

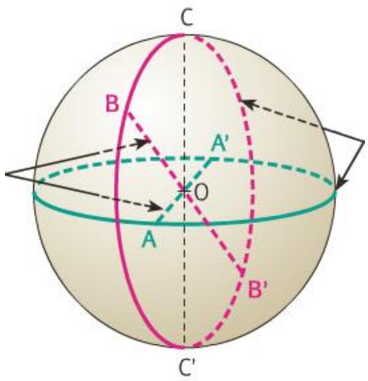
* La sphère **de centre O et de rayon R** est formée de tous les points M de l'espace tels que : $OM = R$.

* La boule **de centre O et de rayon R** est formée de tous les points M de l'espace tels que : $OM \leq R$.

Un **diamètre** de la sphère est un segment de milieu O, dont les extrémités sont deux points de la sphère.

Les diamètres d'une sphère ont tous la même longueur : on l'appelle le **diamètre** de la sphère.

$[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ sont des diamètres : les points A et A', B et B', C et C' sont **diamétralement opposés**.



Un **grand cercle** est un cercle tracé sur une sphère qui a le même diamètre que la sphère.

Les grands cercles sont les plus grands cercles que l'on peut tracer sur la sphère.

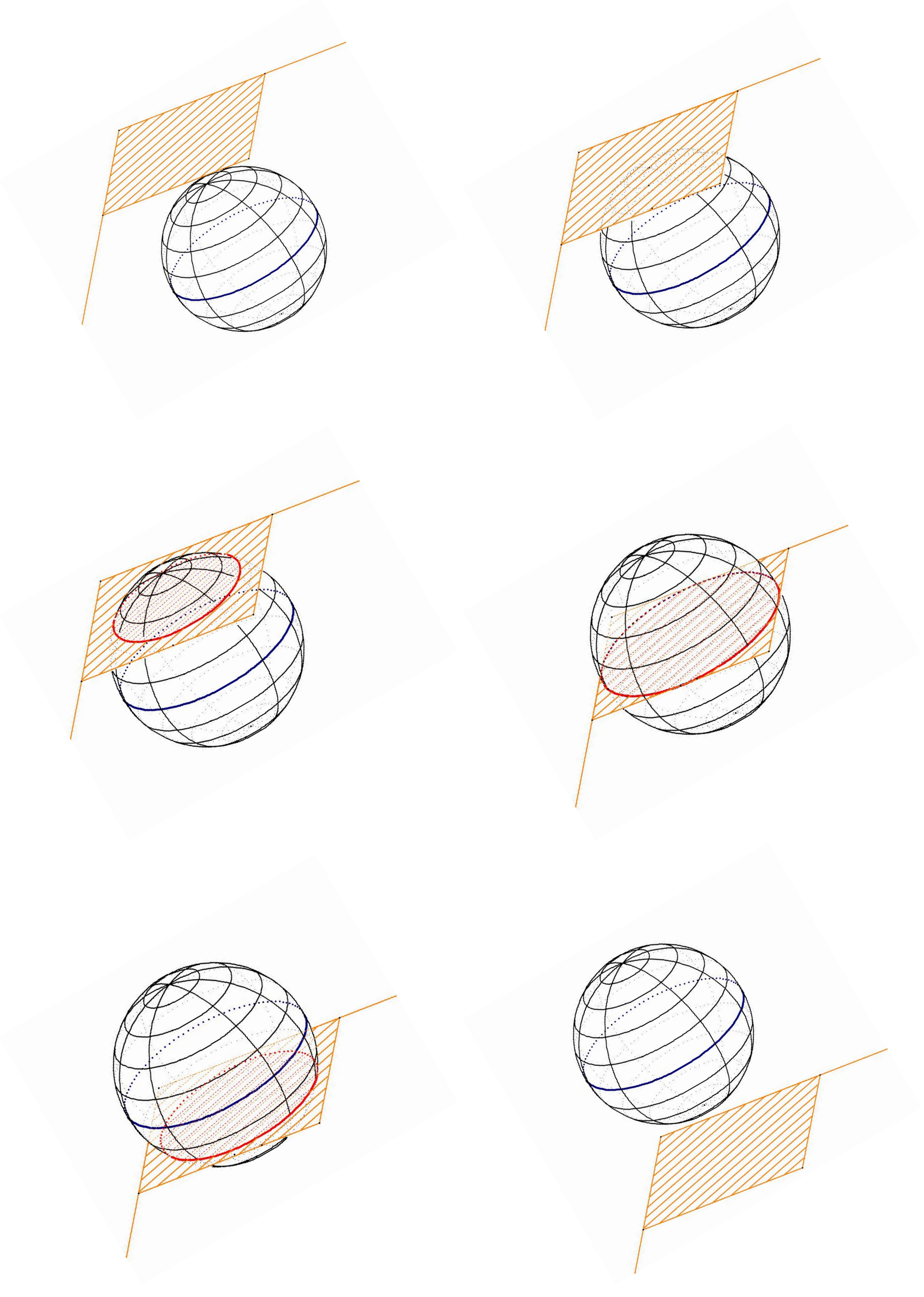
IV section d'une sphère par un plan

La section d'une sphère par un plan est soit :

- **vide** (le plan et la sphère ne se coupent pas),
- **un point** (cas d'un plan **tangent** à la sphère),
- **un cercle**.

remarques : (on va supposer que le plan de coupe descend.)

- Au départ, la section entre le plan et la sphère est vide (le plan et la sphère ne se coupent pas).
- Le plan devient tangent (au sommet de la sphère) : le point de contact est le « pôle nord ».
- Au fur et à mesure que le plan de coupe descend , le rayon du cercle de la section augmente : il est maximum lorsqu'on coupe la sphère « à l'équateur ». Le rayon de la section est alors égal au rayon de la sphère.
- Puis, le rayon diminue jusqu'à devenir égal à zéro (cas d'un plan tangent au « pôle sud »).



Quatrième partie

Grandeurs et mesures

Chapitre 16

Aires et Volumes - Grandeurs composées

I aire d'une sphère, volume d'une boule

I - 1) aire d'une sphère

L'aire d'une sphère de rayon R est donnée par :

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2$$

exemple :
Une sphère de rayon 10 cm a une aire égale à :

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2 = 4\pi \times 10^2 = 400\pi \text{ cm}^2 \textit{ (valeur exacte)}$$

Une valeur approchée au cm^2 est :

$$\mathcal{A} \approx 1257 \text{ cm}^2$$

I - 2) volume d'une boule

Le volume d'une boule de rayon R est donnée par :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

exemple :
Une boule de rayon 10 cm a un volume égal à :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 10^3 = \frac{4000}{3}\pi \text{ cm}^3 \textit{ (valeur exacte)}$$

Une valeur approchée au cm^3 est :

$$\mathcal{V} \approx 4189 \text{ cm}^3$$

II agrandissement - réduction

$\mathcal{F}$ est $\mathcal{F}'$ sont deux figures de l'espace.

Si la figure $\mathcal{F}'$ est un agrandissement ou une réduction de la figure $\mathcal{F}$ dans un rapport k, alors :

* une **longueur** de $\mathcal{F}'$ s'obtient en **multipliant par** k la longueur associée de $\mathcal{F}$

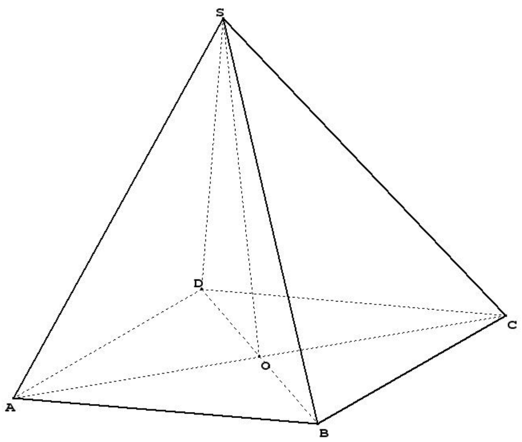
* l'**aire** d'une surface de $\mathcal{F}'$ s'obtient en **multipliant par** k^2 l'aire associée de $\mathcal{F}$

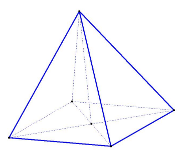
* le **volume** de $\mathcal{F}'$ s'obtient en **multipliant par** k^3 le volume associé de $\mathcal{F}$

exemple :

La pyramide bleue est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ de la pyramide régulière à base carrée $SABCD$.

On donne : $SO = 6$ cm et $AB = 4,5$ cm





* $SO = 6$ cm, donc la hauteur de la pyramide bleue est : $SO \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$ cm.

* l'aire $\mathcal{A}$ du carré $ABCD$ est : $\mathcal{A} = AB^2 = 4,5^2 = 20,25$ cm^2
Donc l'aire $\mathcal{A}'$ de la base de la pyramide bleue est :
$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 20,25 \times \frac{1}{9} = 2,25$ cm^2

* le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide $SABCD$ est : $\mathcal{V} = \frac{AB^2 \times SO}{3} = \frac{20,25 \times 6}{3} = 40,5$ cm^3
Donc le volume $\mathcal{V}'$ de la base de la pyramide bleue est :
$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 20,25 \times \frac{1}{27} = 1,5$ cm^3

III grandeurs composées

Certaines grandeurs sont **composées** par d'autres grandeurs :

* sous la forme de **produit** : une aire est un exemple de grandeur produit

* sous la forme d'un **quotient** : une vitesse est un exemple de grandeur quotient

l'aire d'une surface :

L'aire d'un rectangle est donnée par la formule : $\mathcal{A} = L \times l$.
L'aire est le produit de deux longueurs : c'est une grandeur produit.

Si la longueur et la largeur s'expriment en mètres (m), alors l'aire s'exprime en m^2.

la vitesse :

La vitesse moyenne v est donnée par la formule : $v = \dfrac{d}{t}$.
La vitesse est le quotient de deux grandeurs : une longueur par une durée : c'est une grandeur quotient.

Si la distance d'exprime en kilomètres (km) et la durée en heures (h), alors la vitesse s'exprime en kilomètres par heure (km/h ou $km.h^{-1}$).

Si la distance d'exprime en mètres (m) et la durée en secondes (s), alors la vitesse s'exprime en mètres par seconde (m/s ou $m.s^{-1}$).